1^a LISTA DE MÉTODOS MATEMÁTICOS - PGMC

PROF. GRIGORI CHAPIRO

Todas as soluções tem que ser justificadas!

1. Álgebra Linear

Questão 1. O subconjunto $W = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^4$, onde $u_1 = (1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$, $u_3 = (2, 0, 0, 1)$ é LI?

Questão 2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com operações de soma e multiplicação por escalar usuais. Seja $W = [(1, 0, -1), (1, 2, 3), (3, 2, 1)]$ (espaço gerado). Determine se o vetor $(3, 2, 0) \in W$.

Questão 3. Dado $\alpha = \{(1, 0, 2),\ (2, 1, 0),\ (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ verifique se α é L.I.

Questão 4. Determinar dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais.
(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y\}$;
(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y - z,\ x = z\}$.

Questão 5. Responda justificando se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear:
(a) $T(x, y, z) = (x + z, y + 1)$.
(b) $T(x, y, z) = (x, z, 0)$.

Questão 6. Quais das aplicações abaixo são lineares (justifique a resposta):
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (|x|, 2x + z)$,
(b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y) = (x + y, 0)$,
(c) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $R(x, y, z) = (z, \operatorname{sen}(x), 2x + z)$,
(d) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $Q(x, y) = (x, 1, y)$.

Questão 7. Justifique todas as respostas:
(a) Enuncie o Teorema de Núcleo e Imagem.
(b) Existe uma transformação linear sobrejetiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$?
(c) Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^9$ com $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$ é injetiva?

Questão 8. Encontre uma transformação linear não nula $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = [(1, 2, 0)]$.

Questão 9. Para quais valores de a a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$$

é semelhante a alguma matriz diagonal?

Questão 10. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ com os autovalores iguais a λ, μ e ν respectivamente. Para os itens a seguir responda Falso ou Verdadeiro, **justificando**:
(a) Todo vetor $\vec{x}$ tal que $(A + B)\vec{x} = (\lambda + \mu)\vec{x}$ é autovetor das matrizes A e B.

(b) Todo vetor $\vec{x}$ tal que $(ABC)\vec{x} = (\lambda\mu\nu)\vec{x}$ é autovetor das matrizes A, B e C.
(c) A matriz $(A - \lambda \cdot I_n)$ não tem 0 como autovalor.

Questão 11. Sejam T e S duas transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, α base canônica de $\mathbb{R}^3$,

$$[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [S]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre $[T\, o\, S]^\alpha_\alpha$
(b) O que pode ser dito de $T\, o\, S$?

Questão 12. Dado $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, x + z, 4x - 4y + 5z)$ - um operador linear, faça **justificando**:
(a) Encontre representação matricial de T.
(b) Encontre o polinômio característico de T.
(c) Encontre os autovalores e autovetores de T.
(d) T é diagonalizavel?
(e) Encontre a forma diagonal de T com a base correspondente.
(f) Calcule T^7.
(g) Calcule os autovalores de T^7.
Dica:1. Será que 1 é raiz do polinômio?

Questão 13. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear dado por:

$$T(x, y, z, w) = \left(\frac{3x}{2} + \frac{z}{2}, -x + 3y + z, \frac{x}{2} + \frac{3z}{2}, x - z + 3w \right).$$

(a) Encontre representação matricial de T.
(b) Encontre o polinômio característico de T.
(c) Encontre o polinômio minimal de T.
(d) Encontre os autovalores e autovetores de T.
(e) T é diagonalizavel?
(f) Encontre a forma diagonal de T com a base correspondente.
(g) Calcule T^{12}.
Dica: Será que 3 é raiz do polinômio?

Questão 14. Um operador $T : V \to V$ é *nilpotente* se existir um número natural n tal que $T^n = 0_{V \to V}$ (operador nulo em V), isto é, $T \circ T \circ T \cdots \circ T(v) = \overline{0}_V$. O que podemos afirmar sobre os autovalores de T?

2. Cálculo

Questão 15. Seja $f : X \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.
Encontre o domínio e a imagem de f.

Questão 16. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(b) A função $f(x,y)$ é contínua na origem? **Justifique**.

Questão 17 (20pts)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - diferenciável e $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $w(x,y) = f(y/x, x/y)$. Use a regra da cadeia para mostrar que:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Questão 18. Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(t) = \text{sen}(t), \quad f(x,y) = x - y.$$

(a) Determine a função $g \circ f$.
(b) Calcule as derivadas parciais de $g \circ f$ na origem usando a regra da cadeia.
(c) Seja $h(x,y) = g \circ f(x,y)$. Calcule as derivadas de terceira ordem: $\partial_{xxy} h(x,y)$ e $\partial_{yyy} h(x,y)$.