UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

1º TVC – 2ª chamada – DATA: 02/10/2014 – VALOR: **1/3 DO TOTAL**	
DISCIPLINA: ÁLGEBRA LINEAR - Turmas especiais D e E	**PROFESSOR:** GRIGORI CHAPIRO
ALUNO(A):	**Nº DE MATRÍCULA:** ________________

Esta prova contém quarto questões. A prova deve ser feita **sem consulta** a qualquer material. **Não é permitido** usar **calculadoras**. A resolução das questões pode ser feita a lápis. Questões sem desenvolvimento não serão corrigidas.

Questão 1: Considere o espaço vetorial P_3 formado por polinômios de grau menos ou igual a 3 com operações de soma e multiplicação por escalar usuais. Seja $W = \{p(x) \in P_3, p(1) = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial de P_3.

Solução: Para que um subconjunto seja subespaço é necessário que ele cumpra três condições: vetor nulo tem que estar neste subconjunto, a soma de quaisquer dois elementos deste conjunto tem que estar dentro do conjunto e o produto por escalar de qualquer elemento deste conjunto tem que estar dentro do mesmo conjunto.

• Vetor nulo corresponde ao polinômio $p_0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$ que satisfaz $p_0(1) = 0$, portanto está em W.
• Sejam $p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ e $p_1(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ dois elementos de W. Note que $(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 + 0 = 0$. Logo $(p_1 + p_2) \in W$.
• Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que o polinômio $(\alpha p_1)(x)$ é um polinômio e satisfaz $(\alpha p_1)(1) = \alpha p_1(x) = \alpha \cdot 0 = 0$. Portanto $(\alpha p_1) \in W$.

Pontuação: Explicação 5 pts. Soma 10 pts. Produto por escalar 10 pts.

Questão 2: Determinar dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais.
(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2z - y\}$;
(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0,\ y = 4z\}$.

Solução: Para que um conjunto seja base de um subespaço vetorial ele tem que gerar este subespaço e ser linearmente independente (LI). A dimensão de um subespaço vetorial é o numero de vetores numa base.
(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2z - y\} = \{(2z - y, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y, z \in \mathbb{R}\}$. Portanto o conjunto $\beta = \{(2, 0, 1),\ (-1, 1, 0)\}$ gera W. Como β apenas contém dois vetores, para verificar que ele é LI basta notar que os dois não saõ multiplo um do outro. Portanto β é base de W e $\dim(W) = 2$.

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0,\ y = 4z\} = \{(0, 4z, z) \in \mathbb{R}^3,\ z \in \mathbb{R}\}$. O conjunto $\beta = \{(0, 4, 1)\}$ gera W. Como β contém apenas um vetor, β é LI. Portanto β é base de U e $\dim(U) = 1$.

Pontuação: Explicação 5 pts. (a) dimensão 5 pts, base 5 pts. (b) dimensão 5 pts, base 5 pts.

Questão 3: (a) Determine os valores de a, b e c para os quais o conjunto $\beta = \{(1, -3, 2), (2, 2, 2), (a, b, c)\}$ forma uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual.
(b) Construir a partir de β uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Solução: (a) Para que o conjunto seja ortogonal basta fazer os produtos internos de todos os vetores:
$< (1, -3, 2), (2, 2, 2) >= 2 - 6 + 4 = 0$ - verificado!
$< (1, -3, 2), (a, b, c) >= a - 3b + 2c = 0$ logo $a = 3b - 2c$.
$< (2, 2, 2), (a, b, c) >= 2a + 2b + 2c = 0$ logo $a = -b - c$.
Logo $3b - 2c = -b - c \implies c = 4b$. Portanto $a = -b - 4b = -5b$. Vetor generico ficou $(-5b, b, 4b)$ com $b \neq 0$.
(b) Para construir base ortonormal precesamos apenas dividir os vetores da nova base pela sua norma.

$$w_1 = \frac{(1, -3, 2)}{||(1, -3, 2)||} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -3, 2), \quad w_2 = \frac{(2, 2, 2)}{||(2, 2, 2)||} = \frac{(2, 2, 2)}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

$$w_3 = \frac{(-5b, b, 4b)}{||(-5b, b, 4b)||} = \pm\frac{1}{\sqrt{42}}(-5, 1, 4).$$

O sinal do último vetor depende se b é maior ou menos que 0.

Pontuação: (a) 15 pts. (b) 10 pts. OBS: Não tirei pontos de quem esqueceu de análisar o sinal no (b). Quem substituiu $b = 1$ em (a) e (b) considerei questão completa.

Questão 4: Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{12}$ de dimensão 5.
(a) Defina $V^{\perp}$ (subespaço perpendicular a V).
(b) Qual a dimensão do espaço $V^{\perp}$?.

Solução: (a) $V^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^{12}, < u, v >= 0$ se $v \in V\}$.
(Outra forma é escrever em palavras que é o subespaço formado por todos os vetores ortogonais aos vetores de V e o vetor nulo.)
(b) Os subespaços V e $V^{\perp}$ formam $\mathbb{R}^{12}$ através de uma soma direta. Portanto $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^{12})$. Logo $\dim(V^{\perp}) = 12 - 5 = 7$.

Pontuação: (a) 10 pts. (b) 15 pts.