UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

| 2º TVC – 2ª chamada – DATA: 03/11/2014 – VALOR: **1/3 DO TOTAL** | |
|---|---|
| **DISCIPLINA:** ÁLGEBRA LINEAR - Turmas especiais D e E | **PROFESSOR:** GRIGORI CHAPIRO |
| **NOME LEGIVEL (letra de forma):** | |
| **Turma (D ou E):** | **Nº DE MATRÍCULA:** |

Esta prova contém cinco questões. A prova deve ser feita **sem consulta** a qualquer material. **Não é permitido** usar **calculadora**. A resolução das questões pode ser feita a lápis. Questões sem desenvolvimento não serão corrigidas.

**Questão 1:** Quais das aplicações abaixo são lineares (justifique a resposta):
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, 2x + z)$,
(b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y) = (x, \ln |x|)$,
(c) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $R(x, y, z) = (z, e^x, 2x + z)$,
(d) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $Q(x, y) = (x, 0, y)$.

**Solução:** Para que uma aplicação $T$ seja transformação linear precisamos que $T$ satisfaçã $T(u + v) = T(u) + T(v)$ e $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.
(a) Se $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$, teremos $T(u+v) = (x+a+y+b, 2x+2a+z+c) = (x+y, 2x+z)+(a+b, 2a+c) = T(u) + T(v)$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos $T(\alpha u) = (\alpha(x + y), \alpha(2x + z)) = \alpha(x + y, 2x + z) = \alpha T(u)$. Portanto $T$ é transformação linear.
(b) $T$ não é transformação linear pois se $u = (1, 1)$ e $\alpha = 2$ temos $T(\alpha u) = (2, \ln(2))$ e $\alpha T(u) = (2, 0)$. Lembrando que $\ln(2) > 0$.
(c) $R$ não é transformação linear pois se $u = (0, 0, 0)$ temos $R(\alpha u) = (0, 1, 0)$ e uma transformação linear aplicada no vetor nulo tem que resultar em vetor nulo.
(d) Se $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$, teremos $Q(u + v) = (x + a, 0, y + b) = (x, 0, y) + (a, 0, b) = Q(u) + Q(v)$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos $Q(\alpha u) = (\alpha x, 0, \alpha y) = \alpha(x, 0, y) = \alpha S(u)$. Portanto $S$ é transformação linear.

**Pontuação:** Cada item 5 pts. Erro - 5 pts.

**Questão 2:** Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z)$:
(a) Encontre $\ker(T)$ e $\dim(\ker(T))$;
(b) $T$ é injetiva? Justifique.

**Solução:** (a) Para encontrar o nucleo fazemos:

$$\begin{aligned} &x + 2y - 3z = 0, \\ &2x + z = 0 \end{aligned}$$

Donde seque que $z = -2x$, $y = -7x/2$. Portanto $\ker(T) = [(1, -7/2, -2)]$ e $\dim(\ker(T)) = 1$.
(b) Tem algumas formas de fazer esta questão. Temos um resultado que diz que uma transformação linear é injetica se e somente se seu núcleo é formado apenas pelo vetor nulo. Como esse não é o caso, $T$ não é injetiva.

**Pontuação:** (a) 10 pts. Erro de conta -5 pts. (b) 10 pts. Resposta sem explicação 0 pts. Erro de conta -5 pts.

**Questão 3:** Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,2,0) = (0,1)$, $T(1,0,1) = (0,2)$.

**Solução:** Uma forma de resolver este problema é completar os vetores dados até uma base. Propomos $\beta = \{(1,2,0),(1,0,1),(0,1,0)\}$, note que $\beta$ é LI e como tem 3 vetores é base. Agora temos que achar a relação de $\beta$ com a base canônica $a(1,2,0) + b(1,0,1) + c(0,1,0) = (x,y,z)$

$$\begin{aligned} &a + b = x\\ &2a + c = y\\ &b = z \end{aligned}$$

Portanto $b = z$, $a = x - z$, $c = y - 2x + 2z$.
Definimos $T(0,1,0) = (0,0)$. Vamos recuperar $T$:

$$T(x,y,z) = T(a(1,2,0) + b(1,0,1) + c(0,1,0)) = aT(1,2,0) + bT(1,0,1) + cT(0,1,0) =$$

$$= (x - z)(0,1) + z(0,2) + (y - 2x + 2z)(0,0) = (0, x - z + 2z) = (0, x + z).$$

**Pontuação:** Base 5 pts. Erro -5 pts.

**Questão 4:** Sejam $T$ e $S$ duas transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $\alpha$ base canônica de $\mathbb{R}^2$, se

$$[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad [T \circ S]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre $[S]^\alpha_\alpha$.
(b) Encontre $S$.

**Solução:** (a) Sabemos que $[T \circ S]^\alpha_\alpha = [T]^\alpha_\alpha[S]^\alpha_\alpha$, portando se $[T]^\alpha_\alpha$ é invertível podemos calcular $[S]^\alpha_\alpha$ multiplicando pela inversa. Temos que calcular a inversa de $[T]^\alpha_\alpha$:

$$([T]^\alpha_\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$[S]^\alpha_\alpha = ([T]^\alpha_\alpha)^{-1}[T \circ S]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

(b) Como $\alpha$ é base canônica, para recuperar $S$ basta multiplicar pelo vetor $(x,y)$, portanto
$S(x,y) = (x + y, -y/3)$.

**Pontuação:** (a) 10 pts. (b) 10 pts. Erro de conta -5 pts.

**Questão 5:** (a) Enuncie o Teorema de Núcleo e Imagem.
(b) Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^9$ com $\dim(\mathsf{Im}(T)) = 2$ é injetiva? (justifique a resposta)

**Solução:** (a) Seja $T : V \to U$ uma transformação linear entre dois espaços vetorias $V$ e $U$, temos que

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathsf{Im}(T)) = \dim(V).$$

(b) Pelo Teorema de Núcleo e Imagem temos que $\dim(\ker(T)) = 7$. Para que uma transformação seja injetiva precisamos que o núcleo dela seja formado apenas pelo vetor nulo ou $\dim(\ker(T)) = 0$. Portanto $T$ não é injetiva.

**Pontuação:** (a) 10 pts. (b) 10 pts. Erro pequeno -5 pts.