UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

3º TVC – 2ª chamada – DATA: 04/12/2014 – VALOR: **1/3 DO TOTAL**	
DISCIPLINA: ÁLGEBRA LINEAR - Turmas especiais D e E	**PROFESSOR:** GRIGORI CHAPIRO
NOME LEGIVEL (letra de forma):	
Turma (D ou E):	**Nº DE MATRÍCULA:**

Esta prova contém três questões. A prova deve ser feita **sem consulta** a qualquer material. **Não é permitido** usar **calculadora**. A resolução das questões pode ser feita a lápis. Questões sem desenvolvimento não serão corrigidas.

Questão 1: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear dado por:

$$T(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 2y + z, 2x + y + z).$$

Faça **justificando**:
(a) Encontre representação matricial de T.
(b) Encontre o polinômio característico de T.
(c) Encontre os autovalores e autovetores de T.
(d) Encontre o polinômio minimal de T.
(e) T é diagonalizavel?
• Em caso afirativo encontre a forma diagonal de T com a base correspondente.
• Em caso negativo encontre a forma canônica de Jordan de T.
Dicas: (50 pts) 1. Palavra **justificando** está em negrito. 2. Será que 1 é raiz do polinômio?
3. Autovalor é a mesma coisa que valor próprio.

Solução: (a)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$p_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4.$$

(c) Dos cálculos acima vemos que $p_c(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)(4-\lambda)$. Portanto as raizes de $p_c(\lambda$ são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 4$ que são os autovalores de T. Para achar os autovetores resolvemos os sistemas lineares:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, temos: $v_1 = (x, -2x, x)$, $x \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda_2 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, temos: $v_2 = (y, 0, -y)$, $y \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda_3 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, temos: $v_2 = (z, z, z)$, $z \neq 0$.

(d) Temos $p_c(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)(4-\lambda)$. O polinômio minimal de $[T]$ é o polinômio de menor grau que anula $[T]$. Por outro lado, o polinômio minimal divide o polinômio característico e possui as mesmas raizes (Teorema de Cayley-Hamilton), portanto $m(\lambda) = p_c(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)(4-\lambda)$.
(e) T é diagonalizavel. Podemos ver isso a partir da letra (c), pois $\mathbb{R}^3$ possui uma base de autovetores de T. Outra forma de ver isso é a partir da letra (d), pois o polinômio minimal tem todas as potências iguais a 1. Assim:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

na base $\beta = \{(1,-2,1),(1,0,-1),(1,1,1)\}$.

Pontuação: Cada letra 10 pts. Letra (e) esqueceu de esplicitar a base 5 pts. Erro de conta -5 pts (em cada letra). Contas sem sentido 0 pts.

Questão 2: (a) Defina autovalor e autovetor de um operador linear T. (10 pts)
(b) Seja A uma matriz com autovalor λ. A matriz $A - \lambda I$ possui autovalor zero? (10 pts)

Solução: (a) Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existem $\lambda \in \mathbb{R}$ e vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$, dizemos que λ é autovalor de T e v é autovetor de T.
(b) É só aplicar a definição de autovetor e autovalor. Seja v - autovetor do autovalor λ:

$$(A - \lambda I)v = Av - \lambda Iv = \lambda v - \lambda v = \vec{0} = 0v.$$

Portanto 0 é autovalor da matriz $A - \lambda I$.

Pontuação: (a) Esqueceu de "não nulo" - 5 pts. (b) Erro de conta -5 pts.

Questão 3: (Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico é $p_c(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda-2)^3$, polinômio minimal é $m_T(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda-2)$. Responda **justificando** (30 pts.):
(a) Quanto vale n?
(b) Este operador é diagonalizavel?
(c) Ache a forma de Jordan do operador T.

Solução: (a) O grau do polinômio característico coincide com o tamanho da matriz, portanto $n = 6$.
(b) Como o polinômio minimal tem potências diferentes de 1, T não é diagonalizavel.
(c) Para montar a matriz de Jordan usamos o fato que o tamanho de cada bloco é igual a multiciplicidade algebrica do autovalor (potência da respectiva parcela do polinômio característico), o tamanho do maior subbloco é igual a potência da respectiva parcela do polinômio minimal.

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pontuação: Cada letra 10 pts. Erro de conta -5 pts. (c) Falta de explicação - 5 pts.