Álgebra Linear

André Arbex Hallack
Frederico Sercio Feitosa

Janeiro/2006

Índice

Capítulo 1

Sistemas Lineares

1.1 Corpos

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto de elementos $x, y, z, ...$, com duas operações:

Adição: associa a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ um elemento $x + y \in \mathbb{K}$.

Multiplicação: associa a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ um elemento $x.y \in \mathbb{K}$.

Suponhamos que estas duas operações possuam as seguintes propriedades:

1. $x + y = y + x$ para todos $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{K}$;
   (comutatividade da adição)

2. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$;
   (associatividade da adição)

3. Existe um único elemento nulo 0 (zero) em $\mathbb{K}$ tal que $0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$;
   (elemento neutro da adição)

4. A cada $x \in \mathbb{K}$ corresponde um único elemento $(-x) \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$;
   (simétrico na adição)

5. $x.y = y.x \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$;
   (comutatividade da multiplicação)

6. $x.(y.z) = (x.y).z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$;
   (associatividade da multiplicação)

7. Existe um único elemento não-nulo 1 (um) em $\mathbb{K}$ tal que $x.1 = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$;
   (elemento neutro da multiplicação)

8. Para cada $x \neq 0$ em $\mathbb{K}$ existe um único elemento x^{-1} (ou $1/x$) em $\mathbb{K}$ tal que $x.x^{-1} = 1$;
   (inverso na multiplicação)

9. $x.(y+z) = x.y + x.z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$.
   (distributividade da multiplicação com relação à adição)

O conjunto $\mathbb{K}$, munido das duas operações com as propriedades acima, é denominado um CORPO.

Exemplos:

A) O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\ \}$ dos números inteiros, com as operações usuais, não é um corpo.

B) O conjunto $\mathbb{Q} = \{\ p/q : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\ \}$ dos números racionais, com as operações usuais, é um corpo.

C) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (que fazemos corresponder geometricamente aos pontos de uma reta orientada), com as operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo.

D) O conjunto $\mathbb{C} = \{\ x + iy :\ x, y \in \mathbb{R}\ \}$ dos números complexos, onde

$$\begin{cases} x \text{ é a parte real de } x+iy \quad , \quad y \text{ é a parte imaginária de } x+iy \\ i^2 = -1 \end{cases}$$

com as operações usuais de adição e multiplicação, dadas por:

Adição: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Multiplicação: $(x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, é um corpo.

Observações:

- Os elementos de um corpo $\mathbb{K}$ serão chamados ESCALARES.
- Neste curso iremos trabalhar com os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Consideremos o problema da determinação de n escalares (elementos de $\mathbb{K}$) $x_1, x_2, ..., x_n$ que satisfaçam às condições:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{cases}$$

onde $y_1, y_2, ..., y_m$ e a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são elementos dados de $\mathbb{K}$.

Definição 1.1. *(*) é dito um SISTEMA DE m EQUAÇÕES LINEARES A n INCÓGNITAS. Uma SOLUÇÃO do sistema (*) é uma n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de escalares em $\mathbb{K}$ que satisfaz* **simultaneamente** *às m equações.*

Observação: Se, em particular, $y_1 = y_2 = ... = y_m = 0$, então o sistema é chamado um SISTEMA HOMOGÊNEO e, neste caso, a n-upla $(0, 0, ..., 0)$ será uma solução, denominada SOLUÇÃO TRIVIAL.

Exemplos:

A) $x = 5$, $y = 3$, $z = -1$, ou seja $(5, 3, -1)$, é (a única) solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ -x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

B) O sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ não admite nenhuma solução.

C) Consideremos em um corpo $\mathbb{K}$ o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

D) Consideremos em um corpo $\mathbb{K}$, o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

E) Consideremos, em $\mathbb{C}$, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ix + 2y = 3 - 6i \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

F) Consideremos em um corpo $\mathbb{K}$, o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$$

1.3 Sistemas equivalentes

Seja $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma solução do sistema (*).

Dados m escalares $c_1, c_2, ..., c_m$ em $\mathbb{K}$, temos

$$\begin{cases} c_1(a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n) & = & c_1y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_m(a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n) & = & c_my_m \end{cases}$$

Somando as m equações, temos uma nova equação

$$(c_1a_{11} + ... + c_ma_{m1})x_1 + ... + (c_1a_{1n} + ... + c_ma_{mn})x_n = (c_1y_1 + ... + c_my_m)$$

Esta equação é dita uma COMBINAÇÃO LINEAR das equações do sistema (*) e é imediato que a solução $(x_1, x_2, ..., x_n)$ atende a esta equação.

(Exemplo)

Consequência:

Se tivermos um outro sistema de equações lineares:

$$(**) \begin{cases} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & ... & + & b_{1n}x_n & = & z_1 \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & ... & + & b_{2n}x_n & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1}x_1 & + & b_{k2}x_2 & + & ... & + & b_{kn}x_n & = & z_k \end{cases}$$

no qual cada uma das k equações é combinação linear das equações de (*), então toda solução de (*) é também uma solução de (**).

Observação: Pode acontecer de (**) ter soluções que não são soluções de (*). Isto não ocorrerá se também cada equação de (*) for uma combinação linear das equações de (**).

Definição 1.2. *Dizemos que dois sistemas de equações lineares são EQUIVALENTES se cada equação de cada sistema for combinação linear das equações do outro sistema.*

Temos então o

Teorema 1.3. *Sistemas equivalentes de equações lineares têm exatamente as mesmas soluções.*

Nosso objetivo: Dado um sistema de equações lineares, vamos tentar produzir um outro sistema equivalente ao sistema dado e que seja mais fácil de resolver!

1.4 Operações elementares sobre as equações de um sistema - como produzir sistemas equivalentes

Consideremos as seguintes operações, chamadas ELEMENTARES, sobre as equações de um sistema linear:

(i) multiplicação de uma equação por um escalar não-nulo;

(ii) substituição de uma equação pela soma dela com uma outra equação multiplicada por um escalar;

(iii) troca entre duas equações.

Qualquer uma destas operações irá produzir um sistema equivalente (e, portanto, com as mesmas soluções) ao sistema original. Assim, basta produzirmos um sistema mais fácil de resolver.

Exemplos:

A) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x - 2y = 2 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

Observação: Ao realizar operações elementares sobre as equações dos sistemas lineares, buscando produzir sistemas equivalentes mais simples de resolver, nós trabalhamos efetivamente apenas com os coeficientes a_{ij} e os escalares $y_1, ..., y_m$. Isto motiva a definição de um novo tipo de objeto.

1.5 Matrizes

Definição 1.4. *Uma MATRIZ $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é uma função A do conjunto dos pares de inteiros (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ em $\mathbb{K}$. Os elementos da matriz A são os escalares $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{K}$.*

É conveninete descrever uma matriz exibindo seus elementos em uma tabela retangular com m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

As m-uplas verticais $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ são as chamadas colunas da matriz A.

As n-uplas horizontais $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ são as chamadas linhas da matriz A.

Um elemento a_{ij} está disposto na linha i e na coluna j.

Também denotaremos uma matriz A com m linhas e n colunas por $A_{m \times n}$.

Exemplos:

A) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×2 sobre $\mathbb{R}$.

B) $B = \begin{bmatrix} 2i & 7 & \sqrt{2} + 5i & 3 \\ 2 & 4 & 0 & i \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×4 sobre $\mathbb{C}$.

Igualdade de Matrizes: Duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{r \times s}$ são iguais quando $m = r$, $n = s$ e $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ou seja, quando possuem os mesmos números de linhas e colunas, e os elementos "correspondentes" são todos iguais.

Alguns tipos de matrizes

A) Matriz Quadrada: Uma $m \times n$ matriz é dita quadrada quando tem o mesmo número de linhas e colunas $(m = n)$. Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

A diagonal principal de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ consiste nos elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

B) Matriz Diagonal: Uma matriz $A = (a_{ij})$ é diagonal quando é quadrada e seus elementos que não estão na diagonal principal são todos nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.
Exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Um exemplo especial de matriz diagonal é a chamada **matriz identidade**: ela é uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.
Denotaremos uma $n \times n$ matriz identidade por $I_{n\times n}$ ou simplesmente I quando for claro (pelo contexto) qual a ordem da matriz.

C) Matriz Nula: Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times m}$ é dita nula se $a_{ij} = 0$ para todo i, j, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. A matriz nula será representada por O.

D) Matriz Triangular Superior: Uma matriz $A = (a_{ij})$ é triangular superior quando é quadrada e seus elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$.
Exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & \frac{1}{6} & -2 & i \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E) Matriz Triangular Inferior: Uma matriz $A = (a_{ij})$ é triangular inferior quando é quadrada e seus elementos acima da diagonal principal são todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i < j$.
Exemplo:

$$E = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{5}{6} & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

F) Matriz Coluna: Matriz formada por uma única coluna.

Exemplo:

$$N = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

G) Matriz Linha: Matriz formada por uma única linha.

Exemplo:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -6i & 6 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar

Adição de matrizes: A soma das matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ é a $m \times n$ matriz denotada por $A + B$ e dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um escalar: Se $k \in \mathbb{K}$, o produto $k.A$ é a $m \times n$ matriz denotada por kA e dada por:

$$kA = \begin{bmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & \dots & k.a_{1n} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & \dots & k.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k.a_{m1} & k.a_{m2} & \dots & k.a_{mn} \end{bmatrix}$$

Também definimos : $-A = (-1).A$ e $A - B = A + (-1).B$

Propriedades Básicas : Sejam A, B e C matrizes quaisquer $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ escalares em $\mathbb{K}$. Valem as seguintes propriedades:

(1) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(2) $A + O$ (matriz nula) $= A$

(3) $A + (-A) = O$ (matriz nula)

(4) $A + B = B + A$

(5) $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$

(6) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

(7) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

(8) $1.A = A$

(9) $0.A = O$ (matriz nula)

1.6 Operações elementares sobre linhas de uma matriz

Ao buscar as soluções de um sistema linear

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{cases}$$

realizamos operações elementares sobre as equações do sistema até produzir um sistema equivalente mais simples de resolver.

Neste processo, nós essencialmente trabalhamos com os coeficientes a_{ij} e com os escalares $y_1, ..., y_m$.

Às operações elementares sobre as equações do sistema (*) correspondem, portanto, operações "semelhantes" sobre as linhas da matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & y_m \end{array}\right]$$

chamada a MATRIZ COMPLETA (ou AMPLIADA) do sistema (*). **(Exemplo)**

Definição 1.5. *Se A e B são $m \times n$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{K}$, dizemos que B é LINHA-EQUIVALENTE a A se B pode ser obtida aplicando-se sobre A uma sequência finita de operações elementares sobre linhas.*

Resumindo:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Sistema Linear} & \xrightarrow[\text{sobre as equações}]{\text{operações elementares}} & \textbf{Sistema equivalente mais simples} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \textbf{Matriz completa do sistema} & \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{operações elementares}} & \textbf{Matriz linha-equivalente mais simples} \end{array}$$

Pergunta natural: A que tipo de matriz linha-equivalente estamos tentando chegar?

1.7 Matrizes linha-reduzidas à forma em escada

Definição 1.6. *Uma matriz $m \times n$ é LINHA-REDUZIDA À FORMA EM ESCADA se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual a* 1*;*
2. *cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de uma linha tem todos os seus outros elementos iguais a* 0*;*
3. *toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;*
4. *o primeiro elemento não-nulo da primeira linha ocorre "antes"(em termos de coluna) do primeiro elemento não-nulo da segunda linha, que por sua vez ocorre "antes"do primeiro elemento não-nulo da terceira linha, e assim por diante ...*

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.7. *Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha-equivalente a uma única matriz linha-reduzida à forma em escada.*

Exemplos:

A) $$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} ix + 2y = 3 - 6i \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

C) $$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$$

Exercícios:

1) Descreva todas as possíveis matrizes 2×2, 2×3 e 3×3 que estão na forma linha-reduzida à forma escada.

2) Resolva os seguintes sistemas de equações lineares pelo método do escalonamento: **realizando as 3 operações elementares sobre as linhas da matriz completa do sistema até que a matriz dos coeficientes fique linha-reduzida à forma escada**, produzindo assim um sistema equivalente (portanto com as mesmas soluções do original) e mais fácil de resolver:

a. $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 5 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcrcl} \sqrt{3}x & - & iy & = & 0 \\ x & - & y & = & -3+i\sqrt{3} \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 11 \\ 4x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

e. $\left\{\begin{array}{rcrcl} ix & + & z & = & 2i \\ 2x & - & iz & = & 4 \\ -ix & + & z & = & -i \end{array}\right.$

f. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$

g. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

h. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 5y & & & = & 1 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \\ 5x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$

i. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

j. $$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 3y - 3z = -1 \\ 2x - 9y + z = 5 \end{cases}$$

k. $$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 - 4i \\ -ix + 2y + z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

l. $$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$$

m. $$\begin{cases} 2x - i\sqrt{2}y = 0 \\ ix + y = 0 \end{cases}$$

n. $$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

o. $$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$$

p. $$\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

q. $$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$$

r. $$\begin{cases} -2x + y + 5z = 0 \\ x - 2y - 4z = -3i \\ x - y - 3z = -i \end{cases}$$

3) Determine k para que o sistema abaixo admita solução (e exiba a solução):

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -4x & + & 3y & = & 2 \\ 5x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & k \end{array}\right.$$

4) Determine k para que o sistema homogêneo abaixo admita solução não trivial (e exiba-a):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 5y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & kz & = & 0 \end{array}\right.$$

5) Dado o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 5y & + & 12z & - & w & = & -3 \\ x & + & y & + & 4z & - & w & = & -6 \\ & & 2y & + & 2z & + & w & = & 5 \end{array}\right.$$

(a) Discuta a solução do sistema.
(b) Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema e encontre um valor de k que torne o sistema impossível.

6) Determine os valores de k de modo que o sistema abaixo (e obtenha as soluções) tenha

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & kz & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & k \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

(a) Solução única.
(b) Infinitas soluções.
(c) Nenhuma solução.

7) Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & y_1 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & y_2 \\ & & 5y & - & z & = & y_3 - 1 \end{array}\right.$$

(a) Quais as condições (se houver) sobre y_1, y_2 e y_3 para que o sistema acima tenha solução ?
(b) Cite uma terna (y_1, y_2, y_3) tal que o sistema acima tenha solução.
(c) Apresente a solução correspondente à terna citada acima em (b).

1.8 Multiplicação de matrizes

Definição 1.8. *Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{K}$. O PRODUTO DE A POR B é uma $m\times p$ matriz $C=A.B$ dada por:*

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}.$$

Exemplos:

A) $A=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-2&5\\3&4&0\end{bmatrix}$

B) $C=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}5&-1&2\\15&4&8\end{bmatrix}$

Observação: O produto AB de A por B só está definido quando o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B.

Propriedades:

1. Seja A uma $m\times n$ matriz
   se $I_{m\times m}$ é a $m\times m$ matriz identidade, então $I_{m\times m}.A=A$
   se $I_{n\times n}$ é a $n\times n$ matriz identidade, então $A.I_{n\times n}=A$
2. Seja A uma $m\times n$ matriz
   se $O_{p\times m}$ é a $p\times m$ matriz nula, então $O_{p\times m}.A=O_{p\times n}$ ($p\times n$ matriz nula)
   se $O_{n\times s}$ é a $n\times s$ matriz nula, então $A.O_{n\times s}=O_{m\times s}$ ($m\times s$ matriz nula)
3. Dadas matrizes $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$, temos:
   $A(B+C)=AB+AC$.
4. Dadas matrizes $A_{n\times p}$, $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$, temos:
   $(B+C)A=BA+CA$.
5. Dadas matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times k}$, temos:
   $A(BC)=(AB)C$.
6. Dadas matrizes $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e qualquer escalar λ, temos:
   $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.

Observação: Em geral $AB \neq BA$ (o produto de matrizes não é comutativo).
Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Temos que,

$$AB = O_{3\times 3} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Consequências importantes da definição de multiplicação de matrizes:

1^a) Cada linha da matriz $C = AB$ é uma combinação linear das linhas de B. A combinação linear que "fornece" a i-ésima linha de C é dada pela i-ésima linha de A.
(Exemplo)

2^a) Cada coluna da matriz $C = AB$ é uma combinação linear das colunas de A. A combinação linear que "fornece" a j-ésima coluna de C é dada pela j-ésima coluna de B.
(Exemplo)

3^a) Todo sistema linear **(*)** $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \right.$

pode ser descrito por uma única equação matricial $AX = Y$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes do sistema, } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Observação: Uma solução $(x_1, x_2, ..., x_n)$ do sistema corresponde a uma matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ que satisfaz à equação } AX = Y.$$

(Exemplo)

Exercício:

Considere o sistema $\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$, que na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que a matriz $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução particular para o sistema.

(b) Resolva o sistema e verifique que toda solução é da forma $X = \lambda . \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) Mostre que $\lambda . \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é a solução de $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) Generalize os resultados obtidos acima e mostre que toda solução de um sistema linear $AX = Y$ é a soma de uma solução do sistema homogêneo $AX = 0$ com uma solução particular de $AX = Y$.

4^a) Consideremos um sistema linear $AX = Y$ como (*).

Se existir uma $n \times m$ matriz $\widetilde{A}$ tal que $\begin{cases} \widetilde{A}.A = I_{n\times n} \\ A.\widetilde{A} = I_{m\times m} \end{cases}$, então o sistema possui uma única solução dada por $X = \widetilde{A}.Y$.

(Exemplo)

1.9 Matrizes invertíveis

Definição 1.9. *Uma $n \times n$ matriz quadrada A sobre um corpo $\mathbb{K}$ é dita INVERTÍVEL se existir uma $n \times n$ matriz B tal que $B.A = A.B = I_{n\times n}$. Neste caso B é dita a INVERSA da matriz A e escrevemos $B = A^{-1}$.*

(Exemplo)

Observações:

1. Se A é invertível, então A^{-1} também é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Se A e B são invertíveis, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Teorema 1.10. *Seja A uma $n \times n$ matriz quadrada sobre um corpo $\mathbb{K}$. Temos:*

$$\begin{array}{c} \textit{A é uma matriz} \\ \textit{invertível} \end{array} \iff \begin{array}{c} \textit{Cada sistema } AX = Y \\ \textit{possui uma única solução} \end{array} \iff \begin{array}{c} \textit{A é linha-equivalente à} \\ n \times n \textit{ matriz identidade} \end{array}$$

Procedimento para inversão de matrizes:

Consideremos a matriz $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e o problema de determinar a inversa de A, se ela existir.

Estaremos procurando uma matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ tal que $A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

É fácil ver que este problema é equivalente a resolver os seguintes sistemas lineares (escritos na forma matricial):

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos estes sistemas, executamos sobre a matriz completa de cada um deles as operações elementares sobre linhas até transformar a matriz A dos coeficientes em uma matriz linha-reduzida à forma em escada (A será invertível se, e só se, for linha-equivalente à 2×2 matriz identidade).

Porém, como a matriz dos coeficientes de ambos os sistemas é a mesma (A), podemos resolver os sistemas **simultaneamente**. Para tal, colocamos a matriz identidade ao lado de A e realizamos sobre $I_{2\times 2}$ a mesma sequência de operações sobre linhas que aplicada à matriz A deverá produzir a identidade.

A matriz resultante será a inversa da matriz A.

Observação: Se A não for linha-equivalente à matriz identidade, então A não é invertível.

Exercícios:

1) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Obtenha os produtos: $A.B$ e $B.A$.
(b) Sabemos que cada sistema abaixo possui uma única solução (por que ?). Obtenha-as diretamente.

$$\begin{cases} 3x - 3y - 3z + 2w = 2 \\ -5x + 6y + 6z - 4w = -1 \\ 4x - 5y - 4z + 3w = 3 \\ x - y - z + w = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - z + w = 1 \\ y + z + w = -2 \\ -x + 3w = 0 \end{cases}$$

(c) Verifique as soluções obtidas.

2) O objetivo deste exercício (dirigido) é mostrar que se A e B são duas $n \times n$ matrizes tais que $A.B = I_{n\times n}$, então $B.A = I_{n\times n}$ (ou seja, na definição de matriz invertível, basta que um dos produtos seja verificado).

Suponhamos então que A e B sejam duas $n \times n$ matrizes tais que $A.B = I_{n\times n}$.

1^o passo: Mostre que o sistema homogêneo $BX = O$ só admite a solução trivial.

2^o passo: Conclua que cada sistema $BX = Y$ admite uma única solução.

3^o passo: Sem utilizar o resultado do Teorema 1.10, mostre diretamente do resultado do 2^o passo que existe uma $n \times n$ matriz C tal que $B.C = I_{n\times n}$.

4^o passo: Conclua que $C = A$ obrigatoriamente e portanto $B.A = I_{n\times n}$.

3) Identifique quais matrizes, entre as dadas abaixo, são invertíveis, obtenha as inversas (caso sejam invertíveis) e verifique as inversas.

(Sugestão: Realize operações elementares sobre as linhas da matriz até obter uma matriz linha-reduzida à forma escada e use que uma matriz $A_{n\times n}$ é invertível se, e somente se, A é linha-equivalente à $n \times n$ Matriz Identidade $I_{n\times n}$)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1+2i & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.10 Determinantes

Seja (x, y) uma solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

que na forma matricial é escrito como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad AX = Y$$

sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes do sistema, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Multiplicando cada equação por constantes adequadas e somando-as, buscando "isolar" x e y nas equações do sistema, chegamos a:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).x = (b_1a_{22} - a_{12}b_2) \quad \text{e} \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).y = (a_{11}b_2 - b_1a_{21}).$$

Se $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$, podemos obter:

$$x = \frac{(b_1a_{22} - a_{12}b_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \quad \text{e} \quad y = \frac{(a_{11}b_2 - b_1a_{21})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Existe portanto uma forte relação entre o número $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ e o sistema $A.X = Y$ dado.

Temos então:

Definição 1.11. *Seja* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *uma* 2×2 *matriz (de números reais ou complexos).*

Definimos o DETERMINANTE da matriz A ($\det A$ *ou* $|A|$ *) como:*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

O raciocínio e a definição anteriores podem ser generalizados de forma que possamos definir o determinante de uma matriz de ordem $n \times n$, com $n \geq 3$, através de um método conhecido como Desenvolvimento de Laplace.

Definição 1.12. *Seja* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *uma* $n \times n$ $(n \geq 3)$ *matriz sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

Escolhendo qualquer linha $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *, definimos*

$$\det A \ = \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \ = \ a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + ... + a_{in}\Delta_{in}$$

sendo Δ_{ij} *(COFATOR do elemento* a_{ij} *da matriz A) o escalar dado por*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}. \det A(i|j).$$

onde $A(i|j)$ *é a* $(n-1) \times (n-1)$ *matriz obtida retirando-se de* A *a linha* i *e a coluna* j*.*

Obs.: O resultado independe da linha i escolhida.

(Exemplos)

Observação: Em geral, para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem maior ou igual a 4 é conveniente combinar as propriedades dos determinantes (a seguir) com a definição (Desenvolvimento de Laplace).

Propriedades fundamentais dos determinantes:

A) Se multiplicarmos uma linha de uma matriz quadrada por uma constante, então seu determinante fica multiplicado por esta constante.

B) Trocando a posição de duas linhas de uma matriz quadrada, seu determinante muda de sinal.

C) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D) Se A e B são $n \times n$ matrizes, então $\det(A.B) = \det A. \det B$

E) Se A é uma $n \times n$ matriz e A^t é sua transposta, ou seja, $A^t_{ij} = A_{ji}$ (as colunas de A^t são as linhas de A e as linhas de A^t são as colunas de A, ordenadamente), então

$$\det A^t = \det A\ .$$

Observação: Esta última propriedade nos permite estender as propriedades anteriores referentes a linhas para propriedades semelhantes referentes a colunas.

Também temos, como $\det A^t = \det A$, que $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$, ou seja, o Desenvolvimento de Laplace na nossa definição pode ser feito "ao longo" das colunas da matriz A.

F) Seja $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ uma $n \times n$ matriz na forma de blocos, onde A e C são matrizes quadradas e O é uma matriz nula, então $\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = \det A . \det C$

(Exemplos)

A matriz adjunta: caracterização das matrizes invertíveis

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma $n \times n$ matriz quadrada.

Chamamos de MATRIZ ADJUNTA DE A, à transposta da matriz dos cofatores de A

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

(Exemplo)

Teorema 1.13. *Seja A uma $n \times n$ matriz sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então:*

$$A . \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A . A = (\det A) . I_n$$

(Exemplo)

Finalmente, chegamos ao resultado pretendido:

Teorema 1.14. *Seja A uma $n \times n$ matriz sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então:*

$$A \text{ é invertível} \iff \det A \neq 0$$

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Se A é invertível, então existe uma $n \times n$ matriz B tal que $A.B = I_{n\times n}$. Segue então

$$\det A.\det B = \det(A.B) = \det I = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0 \;.$$

$(\Leftarrow)$ Se $\det A \neq 0$, segue do Teorema anterior que

$$\frac{1}{\det A}\,(A.\operatorname{adj} A) = \frac{1}{\det A}\,(\operatorname{adj} A.A) = \frac{1}{\det A}\,(\det A).I_n \;.$$

Logo

$$A.\left(\frac{1}{\det A}\,\operatorname{adj} A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\,\operatorname{adj} A\right).A = I_n \;.$$

Portanto A é invertível, e $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\operatorname{adj} A$. ∎

Resumo dos principais resultados deste capítulo:

Seja A uma $n \times n$ matriz sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Então

Cada sistema linear $AX = Y$ possui uma única solução.

$\Updownarrow$

O sistema homogêneo $AX = O$ possui apenas a solução trivial $X = O$.

$\Updownarrow$

A é linha-equivalente à $n \times n$ matriz identidade $I_{n\times n}$.

$\Updownarrow$

A é invertível.

$\Updownarrow$

$\det A \neq 0$.

Exercícios:

1) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule

(a) $\operatorname{adj} A$

(b) $\det A$

(c) A^{-1}

2) Prove as seguintes propriedades dos determinantes, utilizando outras propriedades conhecidas ou a própria definição de determinante:

(a) Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz são nulos, então seu determinante é igual a 0 (zero).
(b) Se uma matriz tem duas linhas (ou colunas) iguais então seu determinante é igual a 0 (zero).
(c) Se em uma matriz quadrada, duas linhas (ou colunas) têm seus elementos correspondentes proporcionais, o determinante é igual a 0 (zero).
(d) O determinante de uma matriz não se altera se somarmos a uma linha (coluna) uma outra linha (coluna) multiplicada por uma constante.

Para cada uma das propriedades acima, dê um exemplo com uma aplicação da propriedade.

3) *Propriedade:* O determinante de uma matriz triangular $A_{n\times n}$ é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.

(a) Prove esta propriedade no caso em que A é uma matriz triangular superior (genérica) 4×4. (Sugestão: Use Laplace)

(b) O que você pode dizer sobre o determinante da matriz abaixo ?

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 52 & 27 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \pi & \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}$$

4) Identifique, entre as matrizes dadas, quais são invertíveis, obtenha as inversas (daquelas que forem invertíveis) e verifique as inversas.

(Sugestão: Para identificar as invertíveis, calcule os determinantes e use que uma matriz $A_{n\times n}$ é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$ - dê uma olhada no enunciado do próximo exercício)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&3\\0&2&2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&0&2\\4&-3&7\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}2+i&3\\1&2-i\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}4&-1&2&-2\\3&-1&0&0\\2&3&1&0\\0&7&1&1\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&4\\2&2&4\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}2&3&1&-2\\5&3&1&4\\0&1&2&2\\3&-1&-2&4\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}3&-3&-3&2\\-5&6&6&-4\\4&-5&-4&3\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\qquad H=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0\\19&18&0&0&0\\-6&\pi&-5&0&0\\4&2&\sqrt{3}&0&0\\8&3&5&6&-1\end{bmatrix}\qquad J=\begin{bmatrix}0&-i&-2&i\\1&-1&i&1\\0&-1&1&-i\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}6&2\\11&4\end{bmatrix}\qquad M=\begin{bmatrix}1&1&3&9\\-2&1&6&3\\0&0&3&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\qquad N=\begin{bmatrix}2&-3&7\\1&0&3\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}2&0&i\\1&-3&-i\\i&1&1\end{bmatrix}\qquad Q=\begin{bmatrix}2&-4\\-5i&7i\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&2&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

5) Calcule os determinantes das matrizes do exercício anterior.

6) Responda se cada uma das afirmativas abaixo é verdadeira ou falsa (considere matrizes $n \times n$). Se for verdadeira, justifique-a. Se for falsa, apresente um contra-exemplo mostrando que é falsa:

(a) Se I é a matriz identidade, então $\det I = 1$
(b) Se A é inversível então $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
(c) Para todas matrizes A e B temos que $\det(A+B) = \det A + \det B$
(d) Para todas matrizes A e B temos que $\det(AB) = \det(BA)$
(e) Se existe uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}.A.P$ então $\det B = \det A$
(f) Se $\det A = 1$ então $A^{-1} = A$
(g) Para toda matriz A temos que $\det(k.A) = k.\det A$

7) Para cada um dos $n \times n$ sistemas homogêneos $AX = \lambda X$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ dados a seguir ("arrume" os sistemas e observe que são de fato homogêneos), faça:

(1) Determine os valores de λ para os quais o sistema admite pelo menos uma solução não trivial.

(Sugestão: $CX = 0$ só admite a solução trivial $X = 0$ se, e somente se, $\det C \neq 0$).

(2) Obtenha as soluções de $AX = \lambda X$ para os valores de λ obtidos no item anterior.

a. $\left\{ \begin{array}{rcrcl} -3x & + & 4y & = & \lambda x \\ -x & + & 2y & = & \lambda y \end{array} \right.$ Sobre o corpo $\mathbb{R}$

b. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 6y & - & 6z & = & \lambda x \\ -x & + & 4y & + & 2z & = & \lambda y \\ 3x & - & 6y & + & -4z & = & \lambda z \end{array} \right.$ Sobre o corpo $\mathbb{R}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Sobre o corpo $\mathbb{R}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Sobre o corpo $\mathbb{C}$

Observando que o sistema homogêneo $AX = \lambda X$ corresponde a $(A - \lambda I)X = 0$ (onde I é a $n \times n$ matriz identidade) e baseado na resolução dos ítens (1) e (2) acima, descreva a condição sobre λ para que $AX = \lambda X$ possua pelo menos uma solução não trivial.

Obs.: No futuro, ao estudarmos as transformações lineares, será fundamental obtermos uma matriz **não nula** $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ tal que, dada uma $n \times n$ matriz A, AX seja um múltiplo de X, ou seja, $AX = \lambda X$ $(X \neq 0)$.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

Ao estudarmos o "plano" $\mathbb{R}^2$, o "espaço tridimensional" $\mathbb{R}^3$, o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ das $m \times n$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{K}$, o conjunto $P(\mathbb{K}) = \{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{K}\}$ dos polinômios com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ ou o conjunto $C(\mathbb{R})$ das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, por exemplo, com suas operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, começamos a perceber uma "estrutura comum" a todos estes conjuntos (com estas operações).

Seria então natural estudar esta estrutura da maneira mais geral possível, de modo que os resultados obtidos possam ser aplicados a todos os conjuntos que possuam esta estrutura.

A estrutura comum à qual nos referimos acima é a estrutura de espaço vetorial e a Álgebra Linear estuda (de modo geral) os espaços vetoriais, bem como certos tipos de funções entre espaços vetoriais, as chamadas transformações lineares.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1. *Um ESPAÇO VETORIAL SOBRE UM CORPO* $\mathbb{K}$ *é um conjunto* V*, cujos objetos são denominados VETORES, munido de duas operações:*

- **Adição de vetores:** *que associa a cada par de vetores* u, v *em* V *um vetor* $u + v \in V$*;*
- **Multiplicação por escalar:** *que associa a cada escalar* $a \in \mathbb{K}$ *e cada vetor* $u \in V$ *um vetor* $a.u \in V$*,*

as quais possuem as seguintes propriedades:

EV.1) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$
EV.2) $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$
EV.3) *Existe um único vetor* $0 \in V$*, chamado o VETOR NULO, tal que* $u + 0 = u \quad \forall u \in V$
EV.4) *Para cada vetor* $u \in V$*, existe um único vetor* $-u \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$ *(nulo)*
EV.5) $1.u = u \quad \forall u \in V$
EV.6) $(a.b).u = a.(b.u) \quad \forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall u \in V$
EV.7) $a.(u + v) = a.u + a.v \quad \forall a \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in V$
EV.8) $(a + b).u = a.u + b.u \quad \forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall u \in V$

Exemplos:

A) Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$a.(x, y) = (ax, ay) \;\; \forall a \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Identificamos geometricamente $\mathbb{R}^2$ com o plano cartesiano (estudado na geometria analítica):

$\mathbb{R}^2$, com as operações usuais acima, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

B) Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$$

$$a.(x, y, z) = (ax, ay, az) \;\; \forall a \in \mathbb{R},\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Identificamos geometricamente $\mathbb{R}^3$ com o espaço euclidiano "tridimensional":

$\mathbb{R}^3$, com as operações usuais acima, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

C) Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$, onde está fixado $n \in \mathbb{N}$, com as operações:

$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \quad \forall\ (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$a.(x_1, x_2, ..., x_n) = (ax_1, ax_2, ..., ax_n) \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$, com as operações usuais acima, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

$n = 1 \Rightarrow \mathbb{R}$ (reta) $\qquad n = 2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ (plano) $\qquad n = 3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ (espaço tridimensional)

Observação: Analogamente, considerando $\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{C}, i = 1, ..., n\}$ ($n \in \mathbb{N}$ fixado) com as operações usuais, temos que $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

D) Fixados $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ das $m \times n$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

E) O conjunto $P(\mathbb{K}) = \{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{K}\}$ dos polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, é espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

F) Seja X um conjunto não vazio. Fixado um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), consideremos o conjunto $\mathcal{F}(X;\mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ das funções de X em $\mathbb{K}$, com as seguintes operações:

Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{K})$, definimos $(f+g) : X \to \mathbb{K}$ como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ \ \forall\, x \in X$.

Dados $a \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{K})$, definimos $(af) : X \to \mathbb{K}$ como $(af)(x) = a.f(x) \quad \forall\, x \in X$.

$\mathcal{F}(X;\mathbb{K})$, com as operações acima, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

G) Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, x_3, ...) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, ...\}$, com as operações:

$(x_1, x_2, x_3, ...) + (y_1, y_2, y_3, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ...) \quad \forall\ (x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty$

$a.(x_1, x_2, x_3, ...) = (ax_1, ax_2, ax_3, ...) \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall\ (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty$

$\mathbb{R}^\infty$, com as operações acima, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

H) Consideremos $\mathbb{R}^2$ com as seguintes operações:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$a(x, y) = (ax, y) \qquad \forall\ a \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Com estas operações, $\mathbb{R}^2$ **não é** um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Algumas consequências "imediatas" da definição de espaço vetorial:

(a) Se $w + u = w + v$ então $u = v$;

(b) Se 0 é o vetor nulo e $a \in \mathbb{K}$ é um escalar qualquer, então $a.0 = 0$;

(c) Dados $0 \in \mathbb{K}$ e $u \in V$, temos $0.u = 0$;

(d) Se $a.v = 0$ então $a = 0$ (zero) ou $v = 0$ (vetor nulo) ;

(e) $(-1).u = -u$.

Exercícios:

1) Descreva o vetor nulo de cada um dos espaços vetoriais abaixo (nos quais são consideradas as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar) :

(a) $\mathbb{R}^2$ (b) $\mathbb{R}^3$ (c) $\mathbb{R}^n$ (d) $\mathbb{C}^n$ (e) $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$

(f) $P(\mathbb{R})$ (polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$)

(g) $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$)

2) Em cada item abaixo definimos em $\mathbb{R}^2$ operações de adição de vetores e de multiplicação por escalar com as quais $\mathbb{R}^2$ **não é espaço vetorial**. Mostre (através de contra-exemplos), em cada caso, quais propriedades de espaços vetoriais não são atendidas pelas operações dadas:

(a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 2y_1 + 2y_2)$
$a.(x, y) = (ax, ay)$

(b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$a.(x, y) = (ay, ax)$

3) Seja $V = \{(1, x, 2) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações:

$(1, x_1, 2) + (1, x_2, 2) = (1, x_1 + x_2, 2) \quad \forall\, (1, x_1, 2), (1, x_2, 2) \in V$

$a.(1, x, 2) = (1, ax, 2) \quad \forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, (1, x, 2) \in V$

Mostre que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e obtenha o vetor nulo de V.

2.2 Subespaços Vetoriais

Definição 2.2. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto $W \subset V$ é dito um SUBESPAÇO VETORIAL DE V quando W também é um espaço vetorial se considerarmos W munido das mesmas operações de adição de vetores e de multiplicação por escalar definidas em V.*

Teorema 2.3. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $W \subset V$.*
W é um subespaço vetorial de V se, e somente se:
(i) *O vetor nulo de V pertence a W $(0 \in W)$*
(ii) *Dados $u, v \in W$, então $u + v \in W$*
(iii) *Dados $u \in W$ e $a \in \mathbb{K}$, então $a.u \in W$.*

Exemplos:

A) Seja $W = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (operações usuais). W é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

B) Seja $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. S **não é** subespaço do $\mathbb{R}^2$.

C) Seja $W = \{(x_1, 0, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. W é um subespaço do $\mathbb{R}^4$.

D) Sejam $W = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ tais que } AX = O \right\} \subset M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ fixada.

W é o conjunto solução do sistema homogêneo $AX = O$. W é subespaço de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

E) Se A é uma 3×3 matriz sobre $\mathbb{R}$ e $Y \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então o conjunto solução do sistema não-homogêneo $AX = Y$ dado por $W = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ tais que } AX = Y \right\} \subset M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ **não é** um subespaço de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

F) Uma $n \times n$ matriz A é dita simétrica quando $A^t = A$ (A é igual a sua transposta).

Seja $W = \{A_{2\times 2} : A^t = A\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, ou seja, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Então W (conjunto das 2×2 matrizes simétricas sobre $\mathbb{R}$) é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

G) Seja $P_3(\mathbb{K}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_i \in \mathbb{K}\} \subset P(\mathbb{K})$ o conjunto dos polinômios de grau ≤ 3 sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $P_3(\mathbb{K})$ é um subespaço vetorial de $P(\mathbb{K})$.

H) Seja $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tais que } f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o subconjunto das funções pares. A é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Analogamente, o subconjunto das funções ímpares em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, dado por $B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tais que } f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, também é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

I) Consideremos o espaço $\mathbb{R}^\infty$ de todas as sequências de números reais. Denotaremos por c_{oo} o subconjunto de $\mathbb{R}^\infty$ formado pelas sequências que têm um número FINITO de termos não nulos, ou seja, as sequências que são nulas a partir de um determinado termo.
Por exemplo: $(1, -3, \pi, 0, \sqrt{2}, 0, 0, 0, \ldots) \in c_{oo}$ e $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin c_{oo}$.
c_{oo} é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$.

Observações:

1. Fixado $u \in V$, o conjunto $W = \{a.u : a \in \mathbb{K}\} \subset V$ é um subespaço vetorial de V.
2. O subconjunto $W = \{0\} \subset V$, formado apenas pelo vetor nulo $0 \in V$, é um subespaço de V, denominado SUBESPAÇO NULO.
3. Todo espaço V é subespaço de si mesmo.
4. Os subespaços V e $\{0\}$ de V são denominados SUBESPAÇOS TRIVIAIS.

Exercícios:

1) Considere $\mathbb{C}^2 = \{(x, y) \ ; \ x, y \in \mathbb{C}\}$ que, com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar, é espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$.
Temos que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ ; \ x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2$. $\mathbb{R}^2$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^2$? Justifique.

2) Considere os espaços V dados abaixo munidos das operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar. Para cada caso abaixo, responda se W é subespaço vetorial de V e prove que sua resposta está correta:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \big\{(x, x^3) \ ; \ x \in \mathbb{R}\big\}$ (ilustre geometricamente)

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(3y, y) \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$ (ilustre geometricamente)

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, 3x) \ ; \ x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geq 0\}$ (ilustre geometricamente)

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, 2x - 1) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ (ilustre geometricamente)

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

(f) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 3z - x\big\}$

(g) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(3a - b, 2a + b, a - 2b) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$

(h) $V = \mathbb{R}^3$, W é o conjunto dos vetores do $\mathbb{R}^3$ com pelo menos uma coordenada ≥ 0

(i) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ 2x + y - w = 0 \ \text{ e } \ z = 0\big\}$

(j) $V = \mathbb{C}^4$, W é o conjunto dos vetores do $\mathbb{C}^4$ que têm duas coordenadas iguais

(k) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, y, x, z) \ ; \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

(l) $V = \mathbb{R}^5$, W é o conjunto dos vetores do $\mathbb{R}^5$ com duas ou mais coordenadas nulas

(m) $V = \mathbb{C}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ ; \ x.y = 0\}$

(n) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x, 2x, 3x, \ldots, nx) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$

(o) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \ ; \ a, b \in \mathbb{C} \right\}$

(p) $V = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, W é o conjunto das matrizes triangulares superiores

(q) $V = M_{2\times 3}(\mathbb{C})$, W é o conjunto das 2×3 matrizes sobre $\mathbb{C}$ que têm alguma coluna formada por elementos iguais.

(r) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $W = \{A \in V \ ; \ A^t = -A\}$ (matrizes anti-simétricas)

(s) $V = M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V \ ; \ \det A = 0\}$

(t) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \ ; \ a \in \mathbb{R} \right\}$

(u) $V = P(\mathbb{R})$, W é o conjunto dos polinômios de grau par, acrescido do polinômio nulo

(v) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f(-7) = 0\}$

(w) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f(1) = 1\}$

(x) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ (conjunto das funções periódicas de período 2π)

(y) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \ell^\infty =$ conjunto das sequências LIMITADAS de números reais, ou seja, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ está em ℓ^∞ quando existir algum número real M tal que $|x_i| \leq M$ para todos os termos x_i da sequência.
Por exemplo: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right) \in \ell^\infty$ e $(1, -2, 1, -4, 1, -6, 1, -8, 1, -10, 1, \ldots) \notin \ell^\infty$.

(z) $V = \mathbb{R}^\infty$, W é o conjunto das sequências de números reais que têm uma quantidade INFINITA de termos iguais a zero.

Nosso objetivo agora será construir subespaços a partir de outros subespaços dados. Como subespaços são ainda subconjuntos dos espaços vetoriais nos quais estão inseridos, é natural tentarmos usar as operações de interseção, união entre conjuntos para tentar produzir outros subespaços:

Teorema 2.4 (Interseção de subespaços)**.** *Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V, então sua interseção $W_1 \cap W_2$ é também um subespaço de V.*

Observação: O resultado acima pode ser generalizado para interseção de uma família qualquer (finita ou infinita) de subespaços vetoriais de V.

Exemplos:

A) Consideremos os conjuntos $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, subespaços de $\mathbb{R}^3$ (veja exemplo D).

B) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{C} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

W_1 e W_2 são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ (verifique!). Obtenha $W_1 \cap W_2$.

Definição 2.5. *Dados k subconjuntos $S_1, S_2, ..., S_k \subset V$ (espaço vetorial), definimos sua SOMA como*

$$S_1 + S_2 + ... + S_k = \{v = u_1 + u_2 + ... + u_k : u_i \in S_i\} \subset V.$$

Teorema 2.6 (Soma de subespaços)**.** *Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V, então sua soma $W_1 + W_2$ é também um subespaço de V.*

Observação: O resultado acima é imediato também para a soma $W_1 + ... + W_k$ de uma coleção finita de subespaços de V.

Definição 2.7. *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços de um espaço V. Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ então $W_1 + W_2$ é chamada SOMA DIRETA DE W_1 E W_2 e denotada por $W_1 \oplus W_2$.*

Exemplos:

A) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{C} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

B) Sejam $W_1 = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ subespaços do $\mathbb{R}^3$.
Temos: $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ (Verifique!)

Exercícios:

1) Sejam $W_1 = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + y = 0 \ \text{ e } \ z - t = 0\big\}$ e
$W_2 = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - y - z + t = 0\big\}$ (subespaços de $\mathbb{R}^4$). Determine $W_1 \cap W_2$

2) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ 2x + y - t = 0 \ \text{ e } \ z = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + y = 0 \ \text{ e } \ z - t = 0\}$ (subespaços de $\mathbb{R}^4$). Determine $W_1 \cap W_2$

3) Sejam $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} \ \subset \mathbb{R}^3$.
Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$

4) Dados $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 2)$, sejam W_1 e W_2 respectivamente as retas que passam pela origem de $\mathbb{R}^2$ e contêm u e v. Mostre que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

5) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \ \subset \ M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Obtenha $W_1 + W_2$ e responda se esta soma é direta.

2.3 Combinações lineares: geração de subespaços

Definição 2.8. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma COMBINAÇÃO LINEAR dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ é um vetor*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são escalares do corpo $\mathbb{K}$.

Exemplos:

A) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Consideremos os vetores $v_1 = (1, 2, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$.

B) Seja $V = P(\mathbb{R})$ (espaço dos polinômios em $\mathbb{R}$). Consideremos combinações lineares dos vetores $v_1 = 1, \ v_2 = x^2, \ v_3 = x^3$.

C) Seja $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Sejam $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de um subconjunto $S \subset V$ é um subespaço de V, denominado SUBESPAÇO GERADO PELO CONJUNTO S e denotado por $[S]$.

Observações:

1. Se, em particular, $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é finito , escrevemos $W = [v_1, v_2, ..., v_n]$ para denotar o subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

2. Se $W_1 = [S_1]$ e $W_2 = [S_2]$ então $W_1 + W_2 = [S_1 \cup S_2]$.

3. Se duas matrizes $m \times n$ em um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) são linha-equivalentes, então os espaços de $\mathbb{K}^n$ gerados pelos vetores linha de cada matriz são exatamente os mesmos.

Exemplos:

A) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Sejam $v_1 = (1,2,0)$ e $v_2 = (0,1,1)$. $W = [v_1, v_2] = ?$

B) Seja $S = \{1, x, x^2, x^3\}$. O subespaço $W = [1, x, x^2, x^3] \subset P(\mathbb{R})$ gerado por S é o conjunto de todas as combinações lineares de $1,\ x,\ x^2,\ x^3$, ou seja...

C) Dados $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, encontre $W = [u, v]$.

D) Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos: $(x,y,z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1)$. Logo:

$$[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbb{R}^3$$

E) Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Obtenha geradores para o seguinte subespaço de V:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \ ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

F) Obtenha geradores para o subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$W = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 2x - y + 3z = 0\ \}$$

G) Consideremos no espaço $\mathbb{R}^4$, os vetores $u_1 = (1,2,0,-1)$, $u_2 = (1,1,-1,3)$, $u_3 = (1,4,2,-3)$. É possível obter um conjunto menor de geradores para o mesmo subespaço $[u_1, u_2, u_3] \subset \mathbb{R}^4$?

Exercícios:

1) Responda V ou F, justificando:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $(1,-1,2) \in [(1,2,3),\ (3,2,1)]$

(c) $[(-5,3,2),\ (3,-1,3)] = \mathbb{R}^3$

2) Descreva o subespaço $W \subset M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

O vetor $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ pertence a W ?

3) Sejam U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,0,0)$ e W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

4) Sejam $V = M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, W_1 o subespaço de V formado pelas matrizes triangulares inferiores e W_2 o subespaço de V formado pelas matrizes triangulares superiores. Descreva $W_1 \cap W_2$. Mostre que $V = W_1 + W_2$. A soma $V = W_1 + W_2$ é direta ? Justifique. Obtenha conjuntos de vetores que geram W_1, W_2 e $W_1 \cap W_2$.

5) Considere $V = \mathbb{R}^3$. Exprima o vetor $z = (1,-3,10)$ como combinação linear dos vetores $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$, e $w = (2,-3,5)$. Responda: $z \in [u,v]$? Justifique.

6) Dados os vetores $u_1 = (0,1,-2)$, $u_2 = (-1,0,3)$, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,-1,0)$ em $\mathbb{R}^3$, descreva os subespaços $W_1 = [u_1,v_1]$, $W_2 = [u_2,v_2]$, $W_1 \cap W_2$ e obtenha geradores de $W_1 \cap W_2$.

7) Seja W o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} ; \; a,b \in \mathbb{C} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 0 & i \end{bmatrix} \in W$? $\qquad$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3i & 1 \end{bmatrix} \in W$? $\qquad$ $\begin{bmatrix} 4i & 4 \\ 0 & -2+3i \end{bmatrix} \in W$?

8) Mostre que os polinômios $1-x^3$, $(1-x)^2$, $1-x$ e 1 geram o espaço $P_3(\mathbb{R})$ dos polinômios reais de grau ≤ 3.

9) Dados os vetores $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (1,0,-1)$ no $\mathbb{R}^3$, obtenha um conjunto mais simples (se possível menor) de vetores que gere o mesmo subespaço que v_1, v_2 e v_3. A partir daí, descreva esse subespaço e responda se o vetor $v = (2,2,1)$ está nesse subespaço.

10) Para cada **subespaço** obtido no segundo exercício da primeira lista da Seção 2.2, da letra (a) até a letra (u), obtenha um conjunto de vetores que gera o subespaço.

2.4 Dependência e independência linear

Definição 2.9. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto não-vazio $S \subset V$ é dito LINEARMENTE INDEPENDENTE (L.I.) quando nenhum vetor de S é combinação linear dos demais elementos de S, ou então quando S é composto apenas de um vetor não-nulo. Do contrário, ou seja, se $S = \{0\}$ ou algum vetor de S é combinação linear de outros vetores de S, então S é dito LINEARMENTE DEPENDENTE (L.D.)*

O resultado abaixo facilita a identificação da dependência ou independência linear.

Teorema 2.10. *Um subconjunto $S \subset V$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, sempre que $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$ com $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ e $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{K}$, então obrigatoriamente $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, ou seja, "a* **única** *combinação linear de vetores de S capaz de produzir o vetor nulo, 0, é aquela em que todos os escalares são iguais a 0 (zero)".*

Exemplos:

A) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$.

B) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{\ (1, 2, 0), (0, 1, 1), (-2, -3, 1)\ \}$.

C) $S = \{\ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\ \} \subset \mathbb{R}^3$.

D) "As linhas não-nulas de uma $m \times n$ matriz linha reduzida à forma escada sobre $\mathbb{R}$ correspondem a um conjunto LI de vetores do $\mathbb{R}^n$". **(Exemplo)**

Observações: (Consequências da definição)

1. Todo conjunto que contém o vetor nulo é LD.

2. Se S é LD e $S \subset Q$ então Q é LD.

3. Se S é LI e $R \subset S$ então R é LI.

Exercícios:

1) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dados **dois** vetores $u, v \in V$, mostre que eles são linearmente dependentes (LD) se, e somente se, um é múltiplo escalar do outro.

2) Determinar três vetores em $\mathbb{R}^3$ que sejam linearmente dependentes e tais que dois quaisquer deles sejam linearmente independentes.

3) Considere os espaços V dados abaixo munidos das operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar. Para cada caso abaixo, responda se $S \subset V$ é um conjunto de vetores LI (linearmente independentes) ou LD (linearmente dependentes) em V .

(a) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \{(1,1,1),\ (i,2i,i),\ (2,1,2)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,1),\ (1,2,3),\ (1,4,9)\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,2,3),\ (2,1,-2),\ (3,1,1),\ (4,-1,-2)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,1),\ (-1,1)\}$.

(e) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(f) $V = P(\mathbb{R})$, $S = \left\{ x^3 - 5x^2 + 1,\ 2x^4 + 5x - 6,\ x^2 - 5x + 2 \right\}$.

(g) $V = P_2(\mathbb{C})$, $S = \left\{1,\ x+i,\ (x+i)^2 \right\}$.

2.5 Base e dimensão de um espaço vetorial

Definição 2.11. *Um conjunto* $\underline{\beta \subset V}$ *(espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*) é dito ser uma BASE de* V *quando:*

(i) β *gera* V *(qualquer vetor de* V *é combinação linear de vetores de* β*);*

(ii) β *é linearmente independente (LI).*

Exemplos:

A) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

B) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,1),(-1,2)\}$.

C) Sejam $W = [(1,2,0),(0,1,1),(-2,-3,1)]$ e $\beta = \{(1,2,0),(0,1,1),(-2,-3,1)\}$.

D) Seja $\gamma = \{(1,2,0),(0,1,1)\}$.

E) Obtenha uma base de $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \ ;\ a,b \in \mathbb{C} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

F) Obtenha uma base para $W = [(0,1,1,0),(1,1,1,2),(-1,1,1,-2)]$.

G) Sejam $V = P(\mathbb{R})$ e $\beta = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$.

Observações:

1. Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ possui uma base.

2. Se um espaço vetorial V possui uma base finita, dizemos então que ele possui DIMENSÃO FINITA. Caso contrário, diremos que V possui DIMENSÃO INFINITA.

Teorema 2.12. *Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores não-nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores, podemos extrair uma base de V.*

(Idéia da prova)

Consequências:

1^a) Se um espaço vetorial V é gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, ..., v_n$. Então qualquer conjunto com mais de n vetores é LD.

2^a) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então qualquer base de V tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado DIMENSÃO DE V, e denotado por $\dim V$.

3^a) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, com $\dim V = n$. Se um conjunto β, <u>com n vetores</u>, gera V, então β é LI e, portanto, uma base de V.

Exemplos:

A) $V = \mathbb{R}^3$.

B) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \ ; \ a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

C) $P_3(\mathbb{R})$

D) Seja $W = [\ (1,0,0,0),(1,1,0,0),(2,3,0,0),(1,0,0,1)\ ] \subset \mathbb{R}^4$.

Teorema 2.13. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Qualquer conjunto de vetores LI em V pode ser completado de modo a formar uma base de V.*

(Idéia da prova)

Consequências:

1^a) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, com $\dim V = n$. Se um conjunto β, <u>com n vetores</u>, é LI, então β gera V e é portanto uma base de V.

2^a) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço de V ($W \subset V$).
Então: $W \neq V \;\Leftrightarrow\; \dim W < \dim V$.

3^a) Se $S \subset V$ (espaço) tem n elementos e é LI, então $\dim V \geq n$. Em particular, se existir um conjunto INFINITO e LI em V, então V tem dimensão infinita.

Exemplos:

A) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,1), (-1,2)\}$.

B) $P_2(\mathbb{C})$ e $\beta = \{1, (x-i), (x-i)^2\}$.

C) Verifique se $\mathbb{R}^4 = [(1,-1,3,-1), (2,1,3,0), (0,1,-1,1), (1,3,-1,2)]$.

D) Consideremos em $\mathbb{R}^\infty$ o seguinte conjunto INFINITO de vetores: $S = \{w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots\}$, com

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,0,0,0,\ldots) \\ w_2 &= (0,1,0,0,\ldots) \\ w_3 &= (0,0,1,0,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teorema 2.14. *Se W_1 e W_2 são subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V, então $W_1 + W_2$ possui dimensão finita e*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Exemplo: Se $W_1 = \{(x,-x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(a,b,-a,c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ (subespaços de $\mathbb{R}^4$), obtenha $W_1 \cap W_2$, $\dim W_1$, $\dim W_2$ e $\dim W_1 \cap W_2$ e responda se $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

Exercícios:

1) Mostre que

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (espaço das 2×2 matrizes reais).

2) $V = \mathbb{C}$ é (com as operações usuais) um espaço vetorial **sobre o corpo** $\mathbb{R}$ (mostre se quiser). Determine uma base e sua dimensão.

3) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,-1,1)$, e $v_3 = (1,1,1)$. $[v_1,\ v_2,\ v_3] = \mathbb{R}^3$? Justifique.

4) Seja $W = [\ v_1 = (1,-1,0,0),\ v_2 = (0,0,1,1),\ v_3 = (-2,2,1,1),\ v_4 = (1,0,0,0)\ ] \subset \mathbb{R}^4$.
(a) $(2,-3,2,2) \in W$? Justifique.
(b) Exiba uma base para W. Qual a dimensão ?
(c) $W = \mathbb{R}^4$? Por quê ?

5) Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (3,1,1)$, $v_4 = (4,-1,-2)$.
(a) Estes vetores são LD. Justifique.
(b) Expresse o vetor nulo como combinação linear destes vetores, na qual os coeficientes da combinação não são todo iguais a zero.

6) Considere o sistema linear homogêneo $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & - & 6z & = & 0 \\ x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 6y & - & 14z & = & 0 \end{array} \right.$

(a) Se $W \subset \mathbb{R}^3$ é o subespaço solução do sistema acima, obtenha uma base e a dimensão de W.
(b) Se $U \subset \mathbb{R}^3$ é o espaço gerado pelos vetores-linha da matriz de coeficientes do sistema acima, obtenha uma base e a dimensão de U .

7) Dê exemplo de uma 3×3 matriz sobre $\mathbb{R}$ cujos vetores-linha geram um subespaço de $\mathbb{R}^3$ DIFERENTE do espaço gerado pelos vetores-coluna.

8) Sejam $W_1 = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ x+y=0 \ \text{ e } \ z-t=0\big\}$ e
$W_2 = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ x-y-z+t=0\big\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $W_1 \cap W_2$
(b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$

(c) Determine $W_1 + W_2$
(d) A soma $W_1 + W_2$ é direta ? Justifique.
(e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$? Justifique.

9) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ;\ a = d \ \text{ e } \ b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ;\ a = c \ \text{ e } \ b = d \right\}$

subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

(a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.
(b) Determine $W_1 + W_2$. É soma direta ?
(c) $W_1 + W_2 = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$?

10) Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e seja W o subespaço de V gerado por

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Encontre uma base e a dimensão de W.

11) Pode-se obter uma base para $P_n(\mathbb{R})$ formada por $n+1$ polnômios de grau n ?

12) Já mostramos que, em $\mathbb{R}^\infty$, o conjunto INFINITO $S = \{w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots\}$, com

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,0,0,0,\ldots) \\ w_2 &= (0,1,0,0,\ldots) \\ w_3 &= (0,0,1,0,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

é LI e daí concluímos que $\mathbb{R}^\infty$ tem dimensão infinita.

Perguntamos agora: S é BASE de $\mathbb{R}^\infty$? Justifique.

13) Seja W o subespaço (plano) do $\mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x,y,z)$ tais que $x - 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ <u>do $\mathbb{R}^3$</u> tal que $u_1,\ u_2 \in W$.

14) Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos seguintes vetores :

$v_1 = (1,1,3,1),\ v_2 = (1,-3,15,9),\ v_3 = (1,2,0,-1)$.
(a) Obtenha uma base para W.
(b) Complete essa base obtida na letra (a) até que se tenha uma base para o $\mathbb{R}^4$.

Teorema 2.15. *Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial V, cada vetor de V é escrito de uma única maneira como combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$.*

Definição 2.16. *Fixemos uma base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial V $(\dim V = n)$. Dado $v \in V$, sabemos que existem escalares $a_1, a_2, ..., a_n$,* **únicos**, *tais que*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n.$$

Estes escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ são chamados as COORDENADAS DE v EM RELAÇÃO À BASE β e a $n \times 1$ matriz

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

é dita a MATRIZ DAS COORDENADAS DE v EM RELAÇÃO À BASE β.

(Exemplos)

Sejam v um vetor de um espaço vetorial V, de dimensão finita, e α e β duas bases de V.

Existe alguma relação entre $[v]_\alpha$ e $[v]_\beta$? A resposta é ... SIM!

De fato:

Fixemos duas bases $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de um espaço vetorial V de dimensão finita $(\dim V = n)$.

Dado um vetor $v \in V$ existem, pelo teorema anterior, escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$, **únicos**, tais que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \quad \Rightarrow \quad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Como cada vetor v_i da base α pode ser escrito de uma única forma como combinação linear dos vetores da base β, temos

$$\begin{gathered} v_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \ldots + a_{n1} w_n \\ v_2 = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \ldots + a_{n2} w_n \\ \vdots \\ v_n = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \ldots + a_{nn} w_n \end{gathered}$$

sendo cada a_{ij} determinado de modo único. Logo

$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n =$

$$= c_1(a_{11}w_1 + \ldots + a_{n1}w_n) + c_2(a_{12}w_1 + \ldots + a_{n2}w_n) + \ldots + c_n(a_{1n}w_1 + \ldots + a_{nn}w_n) =$$

$$= (a_{11}c_1 + \ldots + a_{1n}c_n)\, w_1 + (a_{21}c_1 + \ldots + a_{2n}c_n)\, w_2 + \ldots + (a_{n1}c_1 + \ldots + a_{nn}c_n)\, w_n$$

Portanto

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + \ldots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + \ldots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{n1}c_1 + \ldots + a_{nn}c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [v_1]_\beta & [v_2]_\beta & \ldots & [v_n]_\beta \end{array} \end{array} \cdot [v]_\alpha$$

Segue então o ...

Teorema 2.17. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita, com* $\dim V = n$.

Fixadas duas bases ordenadas α *e* β *de* V*, existe uma única* $n \times n$ *matriz* $[I]^\alpha_\beta$ *(denominada a MATRIZ DE MUDANÇA DA BASE* α *PARA A BASE* β *) tal que,*
para todo *vetor* $v \in V$ *:*

$$[v]_\beta = [I]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha$$

Mais ainda, a j-ésima coluna da matriz $[I]^\alpha_\beta$ *é dada pelas coordenadas do j-ésimo vetor da base* α *em relação à base* β*.*

Consequência importante:

$$[I]^\beta_\alpha \cdot [I]^\alpha_\beta = I_{n\times n} = [I]^\alpha_\beta \cdot [I]^\beta_\alpha$$

Portanto $[I]^\alpha_\beta$ **e** $[I]^\beta_\alpha$ **são inversíveis e uma é a inversa da outra**.

Exemplos:

A) $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(-1,2)\}$ são bases do $\mathbb{R}^2$.
Obtenha $[I]^\alpha_\beta$ e $[(3,-5)]_\beta$

B) Seja $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e seja $\beta = \{w_1, w_2\}$ a base obtida pela rotação da base α de um ângulo θ

Exercícios:

1) Mostre que os vetores $u = (i, 1)$ e $v = (1, i)$ formam uma base de $\mathbb{C}^2$ e exprima cada um dos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ da base canônica de $\mathbb{C}^2$ como combinação linear de u e v .

2) Mostre que $\beta = \{(1, 1, 1),\ (-1, 1, 0),\ (1, 0, -1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ e obtenha as coordenadas de $u = (1, 0, 0)$ em relação à base β.

3) Sejam $\beta = \{\ (1, 0),\ (0, 1)\ \}$, $\beta_1 = \{\ (-1, 1),\ (1, 1)\ \}$, $\beta_2 = \left\{\ (\sqrt{3}, 1),\ (\sqrt{3}, -1)\ \right\}$ e $\beta_3 = \{\ (2, 0),\ (0, 2)\ \}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Obtenha as matrizes de mudança de base: (i) $[I]^{\beta_1}_{\beta}$ (ii) $[I]^{\beta}_{\beta_1}$ (iii) $[I]^{\beta}_{\beta_2}$ (iv) $[I]^{\beta}_{\beta_3}$

(b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação às bases β, β_1, β_2 e β_3 ?

(c) As coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por $[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quais são as coordenadas de v em relação às bases β, β_2 e β_3 ?

4) Sejam $V = \mathbb{R}^3$, α e α' bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ e seja $[I]^{\alpha'}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Obtenha $[u]_\alpha$, se $[u]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e obtenha $[w]_{\alpha'}$, se $[w]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5) Se β é a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e β' é obtida de β pela rotação por um ângulo de $-\pi/3\,\text{rad}$, obtenha $[I]^{\beta'}_{\beta}$ e $[I]^{\beta}_{\beta'}$.

6) Sejam $\beta_1 = \{\ (1, 0),\ (0, 2)\ \}$, $\beta_2 = \{\ (-1, 0),\ (1, 1)\ \}$, e $\beta_3 = \{\ (-1, -1),\ (0, -1)\ \}$ três bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Obtenha: (i) $[I]^{\beta_2}_{\beta_1}$ (ii) $[I]^{\beta_3}_{\beta_2}$ (iii) $[I]^{\beta_3}_{\beta_1}$ (iv) $[I]^{\beta_2}_{\beta_1} \cdot [I]^{\beta_3}_{\beta_2}$

(b) Obtenha alguma relação geral a partir das matrizes de mudança de base acima.

7) Seja V o espaço das 2×2 matrizes triangulares superiores sobre o corpo $\mathbb{R}$ e sejam

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \beta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases de V. Obtenha $[I]^{\beta}_{\beta_1}$.

8) Mostre que o conjunto $\alpha = \left\{ 1,\ x - 1,\ x^2 - 3x + 1 \right\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Sabemos que $\beta = \left\{ 1,\ x,\ x^2 \right\}$ é uma outra base do mesmo espaço (mostre). Obtenha $[I]_{\alpha}^{\beta}$ e exprima os polinômios $u = 2x^2 - 5x + 6$ e $v = x^2 + 3x - 4$ como combinação linear dos polinômios que formam a base α.

9) Determinar a matriz das coordenadas do vetor $v = (1, 0, 1)$ em relação à base do espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ dada por $\beta = \{ (2i, 1, 0),\ (2, -1, 1),\ (0, 1 + i, 1 - i) \}$.

Capítulo 3

Transformações Lineares

Existem funções naturais entre espaços vetoriais: são aquelas que "preservam" as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar. Estas funções são as chamadas transformações lineares e iremos estudá-las neste terceiro capítulo.

3.1 Definição e exemplos

Definição 3.1. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e T uma função de V em W ($T : V \to W$). Dizemos que T é uma TRANSFORMAÇÃO LINEAR de V em W quando satisfaz às seguintes condições:*

TL.1 $T(u + v) = T(u) + T(v)$ *para todos* $u,\ v \in V$

TL.2 $T(k.u) = k.T(u)$ *para todos* $k \in \mathbb{K}$ *e* $u \in V$.

Obs.: Quando $V = W$ também dizemos que T é um OPERADOR LINEAR sobre V.

Exemplos:

A) Algumas transformações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:
Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = a.x$, $a \in \mathbb{R}$. T é uma transformação linear.
Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = a.x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. F **não é** linear.

B) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (3x, 0, x - y)$. T é transformação linear.

C) Aplicação Linear Nula:

Seja $T : V \to W$ dada por $T(v) = 0$ (vetor nulo de W), $\forall\, v \in V$. T é linear.

Obs.: A Aplicação Linear Nula é usualmente denotada por $O : V \to W$.

D) Operador Identidade:

Seja $I : V \to V$ definida por $I(v) = v$ para todo $v \in V$.

I é um operador linear (conhecido como Operador Idêntico ou Identidade)

Obs.: Se $T : V \to W$ é linear, então $T(0) = 0$ (vetor nulo de W)

De fato, $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = 0$.

(i) $T(0) = 0$ é condição necessária para que T seja linear, porém não é suficiente:

Exemplo: $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$.

(ii) Vale a contra-recíproca, ou seja, se $T(0) \neq 0$ então T não é linear.

Exemplo: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x, y - 5)$.

E) Algumas aplicações que não são lineares:

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = a.x + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_2(x) = \cos x$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_3(x) = \operatorname{sen} x$

$f_4 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ dada por $f_4(x, y, z) = (2y, x + z + i)$

F) Seja $V = P(\mathbb{C})$ o espaço dos polinômios com coeficientes complexos.

Seja $D : V \to V$ dada por $D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = a_1 + 2.a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$

D é um operador linear (Operador Derivação).

G) Seja $V = C\left([a, b]\,; \mathbb{R}\right)$ o espaço das funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas.

Seja $T : V \to \mathbb{R}$ dada por $T(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$

T é uma transformação linear de V em $\mathbb{R}$.

H) Seja $V = P_n(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a n.

Seja $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ o Operador (Linear) Derivação, dado por

$$D(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_1 + 2.a_2x + \ldots + n.a_nx^{n-1}$$

I) Transformações do Plano no Plano:

As aplicações do espaço $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são chamadas em geral de Transformações do Plano no

Plano, e podem ser ou não lineares. Destacaremos algumas em particular:

1^a) Homotetia (Expansão ou Contração):

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ v & \mapsto & T(v) = \alpha.v\ ,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{l} |\alpha|\ > 1 \longrightarrow T\ \text{ é Expansão} \\ |\alpha|\ < 1 \longrightarrow T\ \text{ é Contração} \end{array}$$

Para todo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $T(v) = \alpha.v = \alpha.(x, y) = (\alpha.x, \alpha.y)$

Na forma de vetor-coluna: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{bmatrix} \alpha.x \\ \alpha.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2^a) Reflexão em torno do eixo Ox:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & T(x, y) = (x, -y) \end{array}$$

ou seja: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

3^a) Reflexão em torno da origem:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ v & \mapsto & T(v) = -v \end{array}$$

ou seja: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

4^a) Rotação de um ângulo θ:
Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário:

Dado $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, sejam:
α = ângulo de $\vec{Ox}$ para v no sentido trigonométrico,
$R_\theta(v) = (x_\theta, y_\theta)$ = imagem de v pela transformação R_θ e
$r = |v|$ = módulo de v (imagem geométrica) $\Rightarrow$ $r = |R_\theta|$, $x = r.\cos\alpha$, $y = r.\operatorname{sen}\alpha$
Temos:
$x_\theta = r.\cos(\alpha + \theta) = r.\cos\alpha.\cos\theta - r.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\theta = x.\cos\theta - y.\operatorname{sen}\theta$
$y_\theta = r.\operatorname{sen}(\alpha + \theta) = r.\operatorname{sen}\alpha.\cos\theta + r.\cos\alpha.\operatorname{sen}\theta = y.\cos\theta + x.\operatorname{sen}\theta$
Logo:

$$R_\theta(x, y) = (\ x.\cos\theta - y.\operatorname{sen}\theta,\ y.\cos\theta + x.\operatorname{sen}\theta\ )$$

Na forma matricial: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{R_\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Exemplo: Rotação de $\pi/2$ rad (90^o)

5^a) Translação (segundo um vetor $(a, b) \neq (0, 0)$):

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & T(x, y) = (x + a, y + b) \end{array}$$

ou seja: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{T} \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$T(0, 0) = (a, b) \neq (0, 0)$ $\Rightarrow$ T **não é** linear.

Exercícios:

1) Responda, justificando, quais das funções abaixo são transformações lineares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x+y, x-y)$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = x.y$

(c) $h : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dada por $h(A) = \det A \quad \forall\, A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$

(d) $L : M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $L(A) = \operatorname{tr} A = \text{traço de } A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$

(e) $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $U(x,y,z) = (x^2 - 3y, 5z, 0)$

(f) $M : P_2(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{C})$ dada por $M(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

(g) $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $S(x,y,z,w) = (y, z-w, 2y+z+2w)$

(h) $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y,z) \xmapsto{N} (x,y,z).\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $R(x,y) = (x, 2^y - 2^x)$

(j) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = |x|$

(k) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y) = x - 2y + 3$

2) Sejam $V = M_{4\times 1}(\mathbb{R})$, $W = M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ e $T : V \to W$ a transformação linear dada por $T(X) = A.X$, sendo A uma 3×4 matriz fixa sobre o corpo $\mathbb{R}$. Mostre que se T é a Transformação Linear Nula, então A é a 3×4 matriz nula $O_{3\times 4}$.

3) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe um vetor $u \in V$ tal que $T(u) = 0$ (vetor nulo de W), podemos concluir então que $u = 0$ (vetor nulo de V) ? Justifique se for verdade ou apresente um contra-exemplo se for falso.

3.2 Resultados imediatos

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear de um espaço vetorial V em um espaço vetorial W. Temos então:

(a) $T(0) = 0$

(b) $T(-u) = -T(u) \quad \forall\, u \in V$

(c) Se $v = c_1.v_1 + c_2.v_2 + \ldots + c_l.v_l \in V$ é combinação linear $(c_i \in \mathbb{K})$ dos vetores $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_l$ então temos:

$$T(v) = T(c_1.v_1 + \ldots + c_l.v_l) = T(c_1.v_1) + \ldots + T(c_l.v_l) = c_1.T(v_1) + c_2.T(v_2) + \ldots + c_l.T(v_l)$$

Este último resultado mostra que as transformações lineares "conservam" as combinações lineares e são portanto as funções naturais entre espaços vetoriais. Esta característica é reforçada no exemplo abaixo:

Exemplo:

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to W$ uma transformação linear do $\mathbb{R}^3$ em um espaço vetorial W.

Temos que $\mathcal{B} = \{\ e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\ \}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Dado qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$, temos:

$v = (x,y,z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1) = x.e_1 + y.e_2 + z.e_3$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ora, temos $T(v) = T(x.e_1 + y.e_2 + z.e_3) = x.T(e_1) + y.T(e_2) + z.T(e_3)$, ou seja, **qualquer transformação linear do $\mathbb{R}^3$ fica completamente determinada por sua atuação nos vetores da base** $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. Por exemplo: $T(-3,5,0) = -3.T(e_1) + 5.T(e_2) + 0.T(e_3)$.

Tentaremos agora generalizar este resultado:

Teorema 3.2. *Consideremos espaços vetoriais* V *e* W *sobre um mesmo corpo* $\mathbb{K}$ *e seja* $\mathcal{B} = \{\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\ \}$ *uma base de* V $(\dim V = n)$*. Então, dados* n *elementos arbitrários (não necessariamente distintos)* $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n \in W$ *, EXISTE UMA ÚNICA TRANSFORMAÇÃO LINEAR* $T : V \to W$ *TAL QUE* $T(v_i) = w_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

Demonstração:

(Existência) Dado $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ $(a_i \in \mathbb{K}) \in V$, defina:

$$T(v) = a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_nw_n\ .$$

T é linear:

(i) $\forall\, u = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n \in V$ temos:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(\ (a_1+b_1)v_1 + \ldots + (a_n+b_n)v_n\ ) = (a_1+b_1)w_1 + \ldots + (a_n+b_n)w_n = \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

(ii) $\forall\, k \in \mathbb{K}$ e $v = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n \in V$ temos:

$T(k.v) = T(ka_1v_1 + \ldots + ka_nv_n) = ka_1w_1 + \ldots + ka_nw_n = k.T(v)$

É também imediato que $T(v_i) = w_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

(Unicidade) Seja $F : V \to W$ linear e tal que $F(v_i) = w_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

Dado $v \in V$, temos $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$.

Logo:

$$\begin{aligned} F(v) &= F(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + \ldots + a_nF(v_n) = \\ &= a_1w_1 + \ldots + a_nw_n = T(v) \ . \end{aligned}$$

Portanto $F = T$. ■

Assim, podemos concluir que uma transformação linear $T : V \to W$ fica completamente determinada se conhecermos sua atuação nos vetores de uma base de V.

Exemplos:

A) Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (0,1,-2)$ e $T(0,1) = (1,0,0)$?

B) Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(2,0) = (1,1,0)$ e $T(-1,1) = (0,2,0)$?

Exercícios:

1) Encontre a transf. linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. Obtenha $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.

2) Qual é a transf. linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tq $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$?
Obtenha $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

3) Qual é a transf. linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $S(1,1,1) = 3$, $S(0,1,-2) = 1$ e $S(0,0,1) = -2$?

4) Sabendo que a transformação T do Plano no Plano dada por uma reflexão em torno da reta $x = y$ é linear, encontre-a. Escreva-a em forma matricial.

5) Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $A(x,y) = (5x+4y, -3x-2y)$. Para quais valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ existem vetores não nulos $u \in \mathbb{R}^2$ tais que $A(u) = \lambda.u$? Esses vetores u são únicos para cada λ fixado ? Determine esses vetores. O que você pode concluir dos vetores "associados" a cada λ ?

6) Tente, usando sua intuição geométrica, responder diretamente às perguntas do exercício anterior para o operador linear T do Exercício 4 acima! Agora faça isto algebricamente e confira com as respostas obtidas intuitivamente.

7) Faça como no exercício anterior para o operador $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por uma rotação de $\pi/2\,\mathrm{rad}$ no sentido trigonométrico.

3.3 Núcleo e Imagem de uma transformação linear

Definição 3.3. *(Núcleo) Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Chama-se Núcleo da transformação linear* T *ao conjunto de vetores* $v \in V$ *que são "levados" por* T *no vetor nulo* $0 \in W$. *Escreve-se:* $N(T), N_T,$ *ou* $\ker T$.

$$\ker T = \{ \; v \in V \; ; \; T(v) = 0 \; \}$$

Exercício: Mostre que $\ker T \subset V$ é um subespaço vetorial de V.

Definição 3.4. *(Imagem) Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Chama-se IMAGEM de* T *e escreve-se* $\operatorname{Im}(T)$ *ou* Im_T *ao conjunto dos vetores* $w \in W$ *para os quais existe* $v \in V$ *com* $T(v) = w$.

$$\operatorname{Im} T = \{ \; w \in W \; ; \; w = T(v) \;\; \textit{para algum } v \in V \; \}$$

Exercício: Mostre que $\operatorname{Im} T \subset W$ é um subespaço vetorial de W.

Exemplos:

A) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (y, x, -2x).$$

B) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 0, y + z, x + y - 2z).$$

Obtenha também $\dim \ker T$ e $\dim \operatorname{Im} T$.

C) Sejam $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ uma matriz fixada.

Defina o operador linear $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como $F(A) = M.A \quad \forall\, A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Encontre $\operatorname{Im} F$ e $\ker F$.

Teorema 3.5. *(Sobre a dimensão do núcleo e a dimensão da imagem)*
Sejam V *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T : V \to W$ *uma transformação linear.*
Então $\operatorname{Im} T$ *tem dimensão finita e*

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

Demonstração:

$\ker T$ é um subespaço de V.

Seja $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ uma base de $\ker T$ (dim $\ker T = r$).

Como $\mathcal{B}$ é LI, podemos completar $\mathcal{B}$ (completamento de base) com vetores de V até obtermos uma base $\mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ de V $(\dim V = r + s)$.

Basta portanto mostrarmos que dim $\operatorname{Im} T = s$.

Mostremos que $\mathcal{B}'' = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_s)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$.

(i) $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_s)\}$ gera $\operatorname{Im} T$:

Dado $w \in \operatorname{Im} T$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

$\mathcal{B}'$ é base de $V \Rightarrow v = c_1u_1 + \ldots + c_ru_r + d_1v_1 + \ldots + d_sv_s$, com $c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{K}$.

Como T é transformação linear: $w = T(v) = T(c_1u_1 + \ldots + c_ru_r + d_1v_1 + \ldots + d_sv_s) =$

$= c_1T(u_1) + \ldots + c_rT(u_r) + d_1T(v_1) + \ldots + d_sT(v_s) = d_1T(v_1) + \ldots + d_sT(v_s)$, pois temos que

$u_i \in \ker T \Rightarrow T(u_i) = 0 \ \ (i = 1 \ldots r)$.

Portanto $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_s)\}$ gera $\operatorname{Im} T$.

(ii) $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_s)\}$ é LI:

Sejam $d_1, d_2 \ldots, d_s \in \mathbb{K}$ tais que $d_1T(v_1) + \ldots + d_sT(v_s) = 0$.

Como T é linear, temos:

$0 = d_1T(v_1) + \ldots + d_sT(v_s) = T(d_1v_1 + \ldots + d_sv_s) \Rightarrow d_1v_1 + \ldots + d_sv_s \in \ker T$.

Mas $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ é base de $\ker T$. Logo existem $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{K}$ tais que $d_1v_1 + \ldots + d_sv_s = c_1u_1 + \ldots + c_ru_r$.

Temos então: $(-c_1)u_1 + \ldots + (-c_r)u_r + d_1v_1 + \ldots + d_sv_s = 0$.

Como $\mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ é base de V, temos que $\mathcal{B}'$ é LI, o que implica obrigatoriamente em $-c_1 = \ldots = -c_r = d_1 = \ldots = d_s = 0$.

Portanto $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_s)\}$ é LI.

Por (i) e (ii), $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_s)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$.

Assim: dim $\operatorname{Im} T = s = \dim V -$ dim $\ker T \Rightarrow$ dim $\ker T +$ dim $\operatorname{Im} T = \dim V$. ∎

Obs.: Nomenclaturas (definições):

NULIDADE de T = dim $\ker T$;

POSTO de T = dim Im T ;

T é dita NÃO-SINGULAR quando $\ker\, T = \{0\}$.

Exercícios:

1) Obtenha o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões para cada uma das transformações do exercício 1 da Seção 3.1 que forem lineares.
Verifique o Teorema 3.5 em cada caso.

2) Obtenha o núcleo e a imagem do operador linear derivação $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$.
(Exemplo H da Seção 3.1)

3) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.
Determine uma base do núcleo de T. Qual a dimensão da imagem de T ? A imagem de T é todo o $\mathbb{R}^3$? Justifique.

4) Pode existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ cuja imagem é todo $\mathbb{R}^5$?
Pode existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker T = \{(0, 0, 0)\}$?
Justifique e tente generalizar cada resultado.

5) Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Mostre então que $\mathcal{B}' = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ gera a $\operatorname{Im} T$, ou seja, qualquer vetor da imagem de T é uma combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}'$.

6) Descreva explicitamente uma transformação linear $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que sua imagem seja o espaço gerado pelos vetores $u = (2i, 1, -3)$ e $v = (0, -i, 1 + i)$.
(Sugestão: combine o resultado do exercício anterior com o Teorema 3.2)

7) Descreva explicitamente um operador linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 3x$.

3.4 Transformações injetoras, sobrejetoras, bijetoras

Definição 3.6. *Uma transformação linear* $F : V \to W$ *diz-se:*

(i) INJETORA (ou INJETIVA) quando nenhum par de vetores distintos tem a mesma imagem, isto é, se $u \neq v$ $(u, v \in V)$ *então* $F(u) \neq F(v)$.

(ii) SOBREJETORA (ou SOBREJETIVA) quando a imagem de F é todo o espaço W, ou seja, dado $w \in W$ existe $v \in V$ tal que $F(v) = w$.

(iii) BIJETORA (ou BIJETIVA) quando F é injetora e sobrejetora.

O teorema a seguir, combinado com o Teorema 3.5, visa facilitar a classificação das transformações lineares segundo a definição acima:

Teorema 3.7. *Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, $\ker T = \{0\}$ (ou seja, quando o seu núcleo possui apenas o vetor nulo).*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear injetora.

Dado $v \in \ker T$, temos $T(v) = 0 = T(0)$.

Como T é injetora, então podemos concluir que $v = 0$.

Logo $\ker T = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\ker T = \{0\}$.

Sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Como T é linear:

$0 = T(u) - T(v) = T(u - v) \Rightarrow u - v \in \ker T = \{0\} \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$.

Portanto T é injetora. ■

Exemplos:

A) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (y, x, -2x)$.

B) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z, w) = (x - y, w, z)$.

C) Sejam $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ uma matriz fixada.

Consideremos o operador linear $F : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ definido por $F(A) = M.A$, para toda $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

D) Seja $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação de um ângulo $\theta = \pi/2$ (sentido anti-horário).

Teorema 3.8. *Sejam* $T : V \to W$ *uma transformação linear,* $\dim V = \dim W < +\infty$ *(isto, é,* V *e* W **têm mesma dimensão, finita***). Então são equivalentes:*

(a) T *é sobrejetora.*

(b) T *é bijetora.*

(c) T *é injetora.*

(d) T *"leva" bases de* V *em bases de* W*, ou seja, se* $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é base de* V *então* $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ *é base de* W *.*

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b): T é sobrejetora $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} T = W$ $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$.

Temos: $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V \Rightarrow \dim W + \dim \ker T = \dim V \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \ker T = 0 \Rightarrow \ker T = \{0\} \Rightarrow T$ é injetora.

Logo T é bijetora.

(b) $\Rightarrow$ (c): Imediato!

(c) $\Rightarrow$ (d): Seja $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V.

Mostremos que $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é LI.

Sejam $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tais que $c_1 T(v_1) = \ldots + c_n T(v_n) = 0$.

Como T é uma transformação linear: $0 = T(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n)$.

Logo $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n \in \ker T = \{0\}$, pois T é injetora.

Assim, $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$, o que implica em $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$.

Então $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ é LI e como $\dim V = \dim W = n$ temos que $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ é base de W.

(d) $\Rightarrow$ (a): Seja $w \in W$. Tome $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V.

Temos então: $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é base de $W \Rightarrow$

$\Rightarrow w = c_1 T(v_1) + \ldots + c_n T(v_n) = T(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n)$.

Portanto T é sobrejetora. ∎

3.5 Isomorfismos

Definição 3.9. *Chama-se ISOMORFISMO uma transformação linear* $T : V \to W$ *que é bijetora. Neste caso dizemos que os espaços vetoriais* V *e* W *são isomorfos e escrevemos* $V \cong W$.

Observação: Do ponto de vista da Álgebra Linear, dois espaços vetoriais isomorfos são "indistinguíveis", "semelhantes", por possuírem a mesma estrutura vetorial (o que é garantido pelo isomorfismo). Se ocorrer $T : V \to V$ linear e bijetora, temos um AUTOMORFISMO (um isomorfismo de V em si próprio).

Exemplos:

A) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-x, y)$.

(T representa uma reflexão em torno do eixo (Oy)

B) Seja $S : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $S(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

Alguns resultados:

Seja $T : V \to W$ um isomorfismo. Então T é bijetora e portanto admite uma função inversa (também bijetora) $T^{-1} : W \to V$, sendo $T^{-1}(T(v)) = v$ para todo $v \in V$ e $T(T^{-1}(w)) = w$ para todo $w \in W$.

Convém então questionarmos: será T^{-1} linear ??? A resposta é...

Proposição 3.10. *Se* $T : V \to W$ *é um isomorfismo então* $T^{-1} : W \to V$ *também é linear e portanto também é um isomorfismo.*

Outras proposições interessantes (considere espaços de dimensão finita):

Proposição 3.11. *Se* $T : V \to W$ *é um isomorfismo então* $\dim V = \dim W$.

Proposição 3.12. *Se* $\dim V = \dim W$ *então existe um isomorfismo* $T : V \to W$.

Exemplo: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$.

Verifique que T é um isomorfismo e encontre T^{-1}, isomorfismo inverso.

Exercícios:

1) Classifique as transformações lineares dos exercícios 1, 2 e 3 da Seção 3.3 quanto à injetividade e à sobrejetividade.

2) Dados $T : U \to V$ linear e injetora e $u_1, \ldots, u_k$ vetores LI em U, mostre que o conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_k)\}$ é LI.

3) Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares T, S, L, M, H satisfazendo:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetora.

(b) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $\ker S = \{(0,0,0)\}$.

(c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $\operatorname{Im} L = \{(0,0)\}$.

(d) $M : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{C})$ bijetora (isomorfismo).

(e) $H : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ bijetora (isomorfismo).

4) Sejam $L : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por $L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ e $R : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por $R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.
Classifique as transformações lineares L e R quanto à injetividade e à sobrejetividade.
Este exercício mostra que o Teorema 3.8 não vale para espaços de dimensão infinita.

5) Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$.
Verifique se T é invertível e, em caso afirmativo, determine T^{-1}.

6) Seja $P : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ **o** operador linear sobre $\mathbb{C}^3$ tal que $P(1,0,0) = (1,0,i)$, $P(0,1,0) = (0,1,1)$, $P(0,0,1) = (i,1,0)$. Verifique se P é isomorfismo (transformação linear bijetora).

3.6 Representação de transformações por matrizes

Veremos agora que, **sob certas condições**, toda transformação linear $T : V \to W$ (sendo V e W espaços de dimensão finita) pode ser representada por uma matriz. A partir daí, vamos simplificar o estudo das transformações lineares através do estudo das matrizes que as representam.

(Exemplos)

Os exemplos anteriores podem ser generalizados:

Proposição 3.13. *Sejam V e W espaços vetoriais, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V, $\beta' = \{w_1, w_1, \ldots, w_m\}$ uma base ordenada de W.*

Para cada transformação linear $T : V \to W$ existe uma (única) $m \times n$ matriz A que representa a transformação T com relação às bases β e β', isto é:

$$[T(v)]_{\beta'} \; = \; A.\,[v]_\beta \quad \textit{para todo vetor } v \in V \;\; (\textit{escrevemos} \;\; A = [T]^\beta_{\beta'} \,) \,.$$

Demonstração:

Dada uma transformação linear $T : V \to W$, como β' é base de W, temos:

$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m$

$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m$

$\vdots$

$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m$.

Para todo vetor $v \in V$ temos: $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$.

Então:

$$\begin{aligned}
T(v) &= T(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots + c_nT(v_n) = \\
&= c_1a_{11}w_1 + c_1a_{21}w_2 + \ldots + c_1a_{m1}w_m \ + \\
&+ c_2a_{12}w_1 + c_2a_{22}w_2 + \ldots + c_2a_{m2}w_m \ + \\
&\qquad \ldots \\
&+ c_na_{1n}w_1 + c_na_{2n}w_2 + \ldots + c_na_{mn}w_m \ .
\end{aligned}$$

Buscando as coordenadas de $T(v)$ em relação à base β':

$$\begin{aligned}
T(v) &= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n)w_1 \ + \ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n)w_2 \ + \ \ldots \\
&\ldots \ + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n)w_m \ .
\end{aligned}$$

Temos então:

$$[T(v)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = A.[v]_\beta \ .$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = A \ = \ [T]^{\beta}_{\beta'} \ .$$

Observe que, fixadas as bases β e β', a matriz $A = [T]^{\beta}_{\beta'}$ é obtida de modo único !!! ∎

Atenção: É importante termos sempre em mente que:

A primeira coluna da matriz $A = [T]_{\beta'}^{\beta}$ (que representa a transformação linear T relativamente às bases β e β') é a matriz das coordenadas de $T(v_1)$ em relação à base β' .

A segunda coluna da matriz $A = [T]_{\beta'}^{\beta}$ é $[T(v_2)]_{\beta'}$.

A terceira coluna da matriz $A = [T]_{\beta'}^{\beta}$ é $[T(v_3)]_{\beta'}$.

$$\vdots$$

A i-ésima coluna da matriz $A = [T]_{\beta'}^{\beta}$ é $[T(v_i)]_{\beta'}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplos:

A) Sejam β a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e β' a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + y, y, y - x)$ e obtenha $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

B) Sendo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$ (linear) e considerando $\alpha = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(2, 1), (5, 3)\}$ base do $\mathbb{R}^2$, obtenha $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

C) Sendo $D : P_2(\mathbb{C}) \to P_2(\mathbb{C})$ o operador derivação e considerando as bases $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{C})$, obtenha $[D]_{\alpha}^{\alpha}$, $[D]_{\alpha}^{\beta}$, $[D]_{\beta}^{\alpha}$ e $[D]_{\beta}^{\beta}$.

D) Sejam $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$\alpha = \{(-1, 0), (1, 2)\}$ base do $\mathbb{R}^2$ e $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + d, b + c) .$$

Obtenha $[T]_{\alpha}^{\beta}$.

Um caso especial: Operadores lineares e mudança de base

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de V ($\dim V = n$).

Dado um operador linear $T : V \to V$, T é representado pelas matrizes:

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} \text{ (em relação à base } \alpha) \quad \text{e} \quad [T]_{\beta}^{\beta} \text{ (em relação à base } \beta) .$$

Pergunta-se: **Existe alguma relação entre $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ e $[T]_{\beta}^{\beta}$?** A resposta é...

... SIM !

Para todo vetor $v \in V$, temos:

$$[Tv]_\beta \;=\; [I]^\alpha_\beta \cdot [Tv]_\alpha \;=\; [I]^\alpha_\beta \cdot [T]^\alpha_\alpha \cdot [v]_\alpha \;=\; [I]^\alpha_\beta \cdot [T]^\alpha_\alpha \cdot [I]^\beta_\alpha \cdot [v]_\beta \ .$$

Então, pela unicidade da matriz representante de T em relação à base β, temos que

$$[T]^\beta_\beta \;=\; [I]^\alpha_\beta \cdot [T]^\alpha_\alpha \cdot [I]^\beta_\alpha \ .$$

Como $[I]^\alpha_\beta = \left([I]^\beta_\alpha\right)^{-1}$, podemos concluir também que

$$[T]^\alpha_\alpha \;=\; [I]^\beta_\alpha \cdot [T]^\beta_\beta \cdot [I]^\alpha_\beta \ .$$

Definição 3.14. *Duas $n \times n$ matrizes A e B sobre um corpo $\mathbb{K}$ são chamadas SEMELHANTES quando existir uma $n \times n$ matriz invertível P (sobre $\mathbb{K}$) tal que*

$$B \;=\; P^{-1}.A.P$$

Portanto, se $T : V \to V$ é um operador linear e α, β são bases de V, então as matrizes $[T]^\alpha_\alpha$ e $[T]^\beta_\beta$ são semelhantes.

Podemos então concluir que mudanças de base constituem uma fonte natural de matrizes semelhantes !

Exemplos:

A) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x,y) = (7x - 4y, -4x + y)$.

(a) Obtenha $[T]$ (matriz representante de T em relação à base canônica).

(b) Se $\beta = \{\ (3,6), (-2,1)\ \}$ (base do $\mathbb{R}^2$), obtenha $[T]^\beta_\beta$.

B) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que $[T]$ (matriz representante de T em relação à base canônica) é dada por

$$[T] \;=\; \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} \ .$$

(a) $T(x,y) =$? Ou melhor: obtenha o operador T .

(b) Obtenha vetores v e w em $\mathbb{R}^2$ tais que $T(v) = 1.v$ e $T(w) = (-3).w$.

(c) Verifique se $\beta = \{v, w\}$ é base do $\mathbb{R}^2$ e, em caso afirmativo, obtenha $[T]^\beta_\beta$.

Exercícios:

1) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x + y, 2z - x)$.

(a) Obtenha $[T]^{\beta}_{\beta'}$, sendo β e β' respectivamente as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.
(b) Obtenha $[T]^{\alpha}_{\alpha'}$, considerando as bases ordenadas $\alpha = \{ (1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0) \}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha' = \{ (0, 1), (1, 0) \}$ de $\mathbb{R}^2$.

2) Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (x, 0)$ e considere as bases ordenadas $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, i), (-i, 2)\}$ de $\mathbb{C}^2$.

(a) Obtenha $[T]^{\alpha}_{\alpha}$, $[T]^{\beta}_{\alpha}$, $[T]^{\alpha}_{\beta}$ e $[T]^{\beta}_{\beta}$.
(b) Obtenha a matriz de T em relação à base ordenada $\{(-i, 2), (1, i)\}$.

3) Seja $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Obtenha $S(x, y, z)$.

4) Sejam $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$,

$\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ tal que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Obtenha $T(x, y)$.

5) Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
(a) Se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, obtenha $[S]^{\alpha}_{\beta}$.

(b) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ache T , isto é, $T(x, y)$.

(c) Ache uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6) Seja $P_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 3 sobre $\mathbb{R}$ e considere o operador linear derivação $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ dado por

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 .$$

Considerando a base $\beta = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ de $P_3(\mathbb{R})$, encontre $[D]_\beta^\beta$ (matriz representante de D em relação à base β).

7) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$. Um problema fundamental da Álgebra Linear consiste em obter uma matriz B, semelhante à matriz A (isto é, $B = P^{-1}.A.P$ com P invertível) tal que B seja o mais SIMPLES possível!

Ora, sabemos que uma fonte natural de matrizes semelhantes é a mudança de base na representação de transformações lineares, ou seja, se α e β são bases de um espaço vetorial V (de dimensão finita) e $T : V \to V$ é um operador linear sobre V, então $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são semelhantes.

Assim sendo, vamos considerar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A = [T]$ (A é a matriz representante de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$). Obtenha $T(x, y)$.

Encontrar uma matriz simples e semelhante à matriz A significa então obter uma base $\beta = \{u, v\}$ do $\mathbb{R}^2$ tal que $B = [T]_\beta^\beta$ seja simples. As matrizes mais simples possíveis são as matrizes diagonais. Vamos tentar então obter uma base β tal que

$$B = [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Isto significa então que, sendo $\beta = \{u, v\}$, teremos $T(u) = \lambda_1.u$ e $T(v) = \lambda_2.v$.

Encontre valores de λ_1 e λ_2 tais que existam vetores não-nulos u e v que satisfaçam as condições acima. Obtenha então u e v e verifique se $\beta = \{u, v\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. Finalmente, obtenha a matriz $B = [T]_\beta^\beta$ (que já sabemos ser semelhante à matriz A).

8) Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado por $W = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + 2y - z = 0\ \}$.
(W é um PLANO que passa pela origem)

Consideremos agora a transformação linear $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é uma REFLEXÃO em torno do plano W.

Obtenha a expressão para $R(x, y, z)$.

Sugestão:
(a) Obtenha uma base $\beta' = \{v, w\}$ para W (espera-se que $\dim W = 2$).
(b) Sabemos da Geometria Analítica (e veremos mais adiante neste curso) que o vetor $u = (1, 2, -1)$ é perpendicular (ortogonal) ao plano W (é um chamado vetor NORMAL ao plano).
Mostre que $\beta = \beta' \cup \{u\} = \{v, w, u\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ (isto também é esperado - por quê ?).
(c) É fácil perceber o efeito da transformação R na base β e assim obter $[R]_\beta^\beta$.
(d) A partir de $[R]_\beta^\beta$, obtenha $[R]$ e daí fica fácil descobrir $R(x, y, z)$.

3.7 Composição de transformações lineares

Definição 3.15. *Sejam* V, W, Z *espaços vetoriais,* $T : V \to W$ *e* $U : W \to Z$ *transformações lineares. Podemos construir a função composta* $(U \circ T) : V \to Z$ *dada por*

$$(U \circ T)v = U(Tv) \quad \forall\, v \in V$$

Podemos indagar: Será $U \circ T$ linear? A resposta é ... SIM!

De fato:
$(U \circ T)(v + w) = U(T(v + w)) = U(Tv + Tw) = U(Tv) + U(Tw) = (U \circ T)v + (U \circ T)w$
$(U \circ T)(k.v) = U(T(k.v)) = U(k.Tv) = k.U(Tv) = k.(U \circ T)v$

Logo $U \circ T$ é linear.

Exemplo: Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$R(x, y) = (x, x - y) \qquad \text{e} \qquad S(x, y) = (2y, x) \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Determine $R \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S \circ R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Composição e matrizes representantes

Sejam V, W e Z espaços vetoriais (todos de dimensão finita), α base de V, β base de W e γ base de Z. Sejam $T : V \to W$ e $U : W \to Z$ transformações lineares.

Acabamos de ver que $(U \circ T) : V \to Z$ é linear.

Nos interessa agora estabelecer uma relação entre a matriz representante da composta $U \circ T$ e as matrizes representantes de U e T (fixadas as bases dos respectivos espaços) que possa nos ajudar a obter informações sobre a composta de um modo mais direto.

Nesse sentido, verificamos a existência da importante relação dada abaixo:

$$[U \circ T]^{\alpha}_{\gamma} = [U]^{\beta}_{\gamma} \cdot [T]^{\alpha}_{\beta} \ .$$

De fato:

Para todo vetor $v \in V$ temos $[(U \circ T)v]_\gamma = [U(Tv)]_\gamma = [U]_\gamma^\beta \cdot [Tv]_\beta = [U]_\gamma^\beta \cdot [T]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha$.

Pela unicidade da matriz representante $[U \circ T]_\gamma^\alpha$, podemos concluir que

$$[U \circ T]_\gamma^\alpha = [U]_\gamma^\beta \cdot [T]_\beta^\alpha \ .$$

Exemplo: Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $R(x, y) = (x, x + y, y)$ e $S(x, y, z) = (z - x, z)$.

Sejam $\alpha = \{(1, -1), (-2, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Obtenha: $[R \circ S]$, $[S \circ R]$, $[S \circ R]_\gamma^\alpha$ e $[S \circ R]_\alpha^\gamma$

A proposição seguinte é uma consequência da representação da composição por matrizes:

Proposição 3.16. *Sejam V e W espaços vetoriais,* **de mesma dimensão (finita)**, $T : V \to W$ *uma transformação linear,* α *uma base de* V *e* β *uma base de* W.

As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T *é invertível (bijetora, isomorfismo)*

(ii) A matriz $[T]_\beta^\alpha$ *é invertível*

Em caso afirmativo, temos ainda

$$\left[T^{-1}\right]_\alpha^\beta = \left([T]_\beta^\alpha\right)^{-1}$$

Exemplo: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, 2y - x)$.

Mostre que T é invertível e determine T^{-1}.

Exercícios:

1) Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares dadas por

$$R(x, y) = (2x, x - y, y) \quad \text{e} \quad S(x, y, z) = (y - z, z - x) \ .$$

Obtenha $[R \circ S]$ e $[S \circ R]$.

2) Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares tais que

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Sabemos que $R \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Obtenha $R \circ S\ (x, y, z)$.

3) No plano, uma rotação anti-horária de 45^o é seguida por uma dilatação (homotetia) de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa esta transformação do plano.

(Sugestão: a aplicação procurada é uma composição de duas transformações lineares. Encontre sua matriz em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ através das matrizes das transformações que a compoem).

4) Qual é a aplicação $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma contração (homotetia) de $1/\sqrt{2}$ seguida de uma rotação horária de 45^o ?

5) Sejam R e S operadores lineares sobre $\mathbb{R}^3$ tais que

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Encontre $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $R = S \circ T$.

6) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão através da reta $y = 3x$.

(a) Encontre $T(x, y)$.
(b) Obtenha uma base α de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

3.8 Posto e Nulidade de uma transformação linear

Ao final da seção 3.3 definimos, para uma transformação linear $T : V \to W$ de V em W (espaços vetoriais de dimensão finita):

POSTO de T = dim $\operatorname{Im} T$ (dimensão da imagem de T).

NULIDADE de T = dim $\ker T$ (dimensão do núcleo de T).

Um resultado de utilidade prática na obtenção do posto e da nulidade de T é o seguinte:

Proposição 3.17. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear de V em W (espaços vetoriais de dimensão finita). Dadas duas bases, α de V e β de W, temos*

Posto de T = Posto de $[T]^\alpha_\beta$ = número de linhas não-nulas da matriz linha-reduzida à forma escada que é linha-equivalente à matriz $[T]^\alpha_\beta$.

Nulidade de T = (número de colunas de $[T]^\alpha_\beta$) - (Posto de T).

Exercícios:

1) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear dada por

$$T(x,y,z) = (x + 5y + 9z, 2x + 6y + 10z, 3x + 7y + 11z, 4x + 8y + 12z) \; .$$

Obtenha $\dim \; \operatorname{Im} T$ (posto de T) e $\dim \; \ker T$ (nulidade de T).

2) Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Obtenha o posto e a nulidade de cada uma das transformações acima.

Capítulo 4

Formas Canônicas

Neste capítulo estaremos interessados em, dado um operador linear $T : V \to V$ sobre um espaço de dimensão finita, obter uma base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ (matriz representante de T em relação à base β) seja a mais simples possível (formas canônicas), no sentido de que possamos operar mais facilmente com a mesma.

4.1 Autovalores e autovetores

Ao buscarmos uma base β de V que torne simples $[T]_\beta^\beta$, o primeiro tipo (mais simples) de matriz que surge é a matriz diagonal. Assim sendo, queremos que $[T]_\beta^\beta$ seja, ou pelo menos se aproxime de, uma matriz diagonal. Somos então levados naturalmente a procurar, para formarmos a base β, vetores (obviamente não-nulos, pois irão compor uma base) $v \in V$ tais que existam escalares $\lambda \in \mathbb{K}$ com $T(v) = \lambda . v$.

Definição 4.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear (V sobre um corpo $\mathbb{K}$). Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é dito um AUTOVALOR de T quando existir um vetor* **não-nulo** *$v \in V$ tal que*

$$T(v) = \lambda . v \ .$$

Um vetor v que cumpra esta condição é dito um AUTOVETOR associado ao autovalor λ.

Se λ é um autovalor de $T : V \to V$, o subespaço $V_\lambda = \{v \in V \ ; \ T(v) = \lambda . v\}$ (subespaço vetorial de V - exercício) é chamado o SUBESPAÇO ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ ou AUTOESPAÇO ASSOCIADO A λ .

Obs.: Outras denominações:
Autovalores: valores característicos, valores próprios.
Autovetores: vetores característicos, vetores próprios.

Exemplos:

A) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.
$v = (5, 2)$ é um autovetor do operador T .
$w = (2, 1)$ não é um autovetor do operador T.

B) Nem todo operador $T : V \to V$ possui autovetores !
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$. T não possui autovetores.

C) Proposição: Dado um operador linear $T : V \to V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ ($T(v) = \lambda.v$) então, dado $k \in \mathbb{K}$ $(k \neq 0)$, $k.v$ também é um autovetor associado ao mesmo autovalor λ .

D) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador dado por $T(x, y) = (x, -y)$. Encontre os autovalores e autovetores de T.

E) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador dado por $T(x, y) = (-3x+2y, -4x+3y)$. Encontre os autovalore e autovetores de T.

F) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (2x, -z, y)$. Encontre os autovalores e autovetores de T.

Autovalores de uma matriz:

Definição 4.2. *Dada uma $n \times n$ matriz A sobre um corpo $\mathbb{K}$, definimos os autovetores e autovalores de A como os mesmos do operador $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $[T] = A$.*

4.2 Obtendo autovalores e autovetores

Sejam $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (lembremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) um operador linear e a $n \times n$ matriz A tal que $A = [T]$ (A é a matriz que representa T em relação à base canônica).

Para obtermos os autovalores e autovetores de T e A, procederemos da mesma forma que nos exemplos anteriores:

Queremos obter $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, $v \in \mathbb{K}^n$ tais que

$$T(v) = \lambda.v \text{ , ou seja, } \lambda.v - T(v) = 0 \text{ (vetor nulo).}$$

O que também pode ser descrito como: $\lambda.I(v) - T(v) = 0 \Leftrightarrow (\lambda.I - T)(v) = 0$.

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} - A. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda.I - A)\,. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Para que o sistema $(*)$ acima possua soluções não-triviais (lembremos que estamos buscando vetores **não-nulos** v), devemos ter

$$\det(\lambda I - A) = 0\ .$$

Portanto, os valores característicos do operador T (e da matriz A) são exatamente os escalares $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que $\det(\lambda I - A) = 0$ (equação característica da matriz A ou do operador T).

Definição 4.3. *Definimos o POLINÔMIO CARACTERÍSTICO da matriz* A *como sendo o polinômio*

$$p_A(x) = \det(xI - A)\ .$$

Consequências:

(a) Como A é uma $n \times n$ matriz sobre o corpo $\mathbb{K}$, seu polinômio característico será um polinômio de grau n e coeficientes em $\mathbb{K}$.

(b) Se duas $n \times n$ matrizes A e B são semelhantes então elas têm o mesmo polinômio característico.

Esta consequência nos permite definir o POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DE UM OPERADOR $T : V \to V$, $p_T(x)$, como o polinômio característico de **qualquer** matriz representante de T, $[T]_\beta^\beta$ em relação a uma base β de V.

(c) É claro que os autovalores de A (e portanto de T) são as raízes do seu polinômio característico e usaremos o sistema $(*)$ acima para determinar seus autovetores.

Obs.: Se tivermos $T : V \to V$, $\dim\ V = n$ e $V \neq \mathbb{K}^n$ (por exemplo, se V é um espaço de polinômios ou matrizes), então escolha uma base α de V e a partir daí cada vetor $v \in V$ poderá ser representado por sua n-upla de coordenadas em relação à base α, ou seja, podemos tomar os mesmos procedimentos acima, como se estivéssemos no espaço $\mathbb{K}^n$ (isomorfismo entre espaços de polinômios ou matrizes e espaços do tipo $\mathbb{K}^n$).

Apêndice: Um pouco sobre polinômios:

Um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ de grau n tem no máximo n raízes distintas.

Um escalar λ é raiz de um polinômio $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $(x-\lambda)$.

Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais e o número complexo $a+ib$ é raiz de $p(x)$ então seu conjugado $a-ib$ também é raiz de $p(x)$.

Exemplo: Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z)=(x+y, x-y+2z, 2x+y-z)$. Obtenha os autovalores e autovetores de T.

Exercícios:

1) Ache os autovalores e autovetores correspondentes dos operadores lineares dados abaixo:

(a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(2y,x)$.

(b) $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $S(x,y)=(x+y,2x+y)$.

(c) $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $L(x,y,z)=(x+y,x-y+2z,2x+y-z)$.

(d) $M: M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ dado por $M(A)=A^t$ (transposta de A).

(e) $H: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dado por $H(ax^2+bx+c)=ax^2+cx+b$.

(f) $U:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $U(x,y,z,w)=(x,x+y,x+y+z,x+y+z+w)$.

2) Encontre o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y,y)$ e $(-2y,y)$ respectivamente.

3) Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $D=\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $G=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $H=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $I=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

(j) $J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Seja $T : V \to V$ um operador linear.
Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora.
A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T ?

5) Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = A$.

(a) Mostre que T é invertível (bijetora, isomorfismo) e obtenha T^{-1}.

(b) Mostre que os autovalores de qualquer operador linear invertível não são nulos, ou seja, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor de T, se T for invertível.
(Sugestão: Dê uma olhada no exercício anterior)

(c) Obtenha os autovalores e autovetores correspondentes de T e T^{-1} (o mesmo que obter os de A e A^{-1}).

(d) Generalize o resultado obtido na letra (c) acima, para um operador invertível $T : V \to V$.

6) Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obtenha os autovalores e autovetores de A ...

(a) ... sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

(b) ... sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

4.3 Forma diagonal: a primeira forma canônica

Base de autovetores, operadores diagonalizáveis:

Seja $T : V \to V$ (dim $V = n$) um operador linear.

Se V possui uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de autovetores de T, temos:

$$\begin{array}{c} T(v_1) = \lambda_1.v_1 \\ T(v_2) = \lambda_2.v_2 \\ \vdots \\ T(v_n) = \lambda_n.v_n \end{array} \quad \Rightarrow \quad [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a matriz representante de T em relação à base β é diagonal.

Reciprocamente, se $\gamma = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base de V tal que $[T]_\gamma^\gamma$ é diagonal:

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} T(w_1) = a_1.w_1 \\ T(w_2) = a_2.w_2 \\ \vdots \\ T(w_n) = a_n.w_n\,. \end{array}$$

Logo γ é uma base de autovetores de T.

Portanto $T : V \to V$ admite uma base β (de V) de autovetores se, e somente se, $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal.

Definição 4.4. *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear.*
T *é um operador DIAGONALIZÁVEL se, e somente se, existe uma base de* V *cujos elementos são (todos) autovetores de* T.

Exemplos:

A) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

T é diagonalizável ?

B) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

T é diagonalizável ?

C) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. T é diagonalizável ?

D) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. T é diagonalizável ?

Uma propriedade importante: Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes (LI).

Consequência: Se V é um espaço vetorial de dimensão n e um operador linear $T : V \to V$ possui n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

4.4 Polinômio minimal (ou mínimo)

Polinômio minimal de uma matriz:

Definição 4.5. *Sejam* $p(x) = a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *um polinômio e* A *uma matriz quadrada. Então* $p(A)$ *(lê-se* p *aplicado em* A*) é a matriz:*

$$p(A) = a_l A^l + a_{l-1}A^{l-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I \ .$$

Quando $p(A) = 0$ *(matriz nula), dizemos que o polinômio* p *ANULA a matriz* A *.*

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $p(x) = 2x^2 - x + 3$, $q(x) = x^2 - 1$.

Definição 4.6. *Seja* A *uma matriz quadrada. O POLINÔMIO MINIMAL (ou MÍNIMO) de* A *é um polinômio* $m_A(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *tal que*

(i) $m_A(A) = 0$ *(*m_A *anula a matriz* A*).*

(ii) $m_A(x)$ *é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam* A*.*

Veremos a seguir alguns critérios que ajudarão a obter o polinômio minimal de uma matriz:

Teorema 4.7. *Se um polinômio* $f(x)$ *anula a matriz* A *então* f *é divisível pelo polinômio minimal de* A*.*

Teorema 4.8. *(Cayley-Hamilton) O polinômio característico de uma matriz anula essa matriz.*

Teorema 4.9. *As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (reais ou complexas) do polinômio característico da matriz considerada.*

Se combinarmos os três resultados anteriores temos um bom método para a obtenção de "candidatos a polinômio minimal" de uma matriz dada.

Observe que **o polinômio minimal de uma matriz dada deve ser um divisor do polinômio característico dessa matriz e possuir as mesmas raízes**.

Por exemplo, se $p_A(x) = (x+2)^2(x-1)(x-3)^2$ é o polinômio característico de uma matriz A então os candidatos a polinômio minimal são:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= (x+2)(x-1)(x-3) \\
f_2(x) &= (x+2)^2(x-1)(x-3) \\
f_3(x) &= (x+2)(x-1)(x-3)^2 \\
f_4(x) &= (x+2)^2(x-1)(x-3)^2 = \; p_A(x)
\end{aligned}
$$

Dentre estes, o de menor grau que anular a matriz A será o polinômio minimal de A.

Exemplos:

A) Obtenha o polinômio minimal da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B) Obtenha o polinômio minimal da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

C) Obtenha o polinômio minimal da matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

D) Obtenha o polinômio minimal da matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Polinômio minimal de um operador linear:

Definição 4.10. *Definimos o polinômio minimal de um operador* $T : V \to V$ *como o polinômio minimal de qualquer matriz representante de* T, $[T]_\beta^\beta$ *(onde* β *é uma base qualquer de* V*).*

O resultado a seguir justifica a obtenção do polinômio minimal de um operador linear:

Teorema 4.11. *Um operador linear* $T : V \to V$ *é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de* T *é da forma*

$$m_T(x) = (x-\lambda_1).(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_r) \;\; , \;\; \textit{com} \;\; \lambda_1,\, \lambda_2, \ldots,\, \lambda_r \;\; \textit{autovalores distintos.}$$

Exemplos:

A) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $T(x, y, z, w) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -w)$.

Obtenha o polinômio minimal de T. T é diagonalizável ?

B) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + y, y, -2z)$ é diagonalizável ?

C) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (x - y, 2x - y)$.

Obtenha o polinômio minimal de T. T é diagonalizável ? E se considerarmos $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$?

Exercícios:

1) Dentre os operadores do exercício 1 da Seção 4.2, quais são diagonalizáveis ?

2) Uma $n \times n$ matriz quadrada A sobre um corpo $\mathbb{K}$ é dita diagonalizável quando o operador linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $[T] = A$ for diagonalizável.

Quais matrizes do exercício 3 da Seção 4.2 são diagonalizáveis ?

3) Para quais valores de a as matrizes abaixo são diagonalizáveis ?

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} .$$

Se for possível, encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_\gamma^\gamma$ seja diagonal.

5) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, exibindo uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}.A.P$.

6) Mostre que ...

(a) ... duas matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante.

(b) ... se uma matriz quadrada A é diagonalizável, o determinante de A á o produto de seus autovalores.

7) Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é NILPOTENTE se existir um número inteiro e positivo k tal que $T^k = 0$ (operador nulo), isto é, $T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T\ (v) = 0$ para todo $v \in V$.

a) Seja T nilpotente. Encontre seus autovalores. (Sugestão: observe que x^k anula T)

b) Encontre uma matriz $A = [T]$, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com T nilpotente e não-nulo.

c) Mostre que um operador linear nilpotente, não-nulo, não é diagonalizável.

8) Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é IDEMPOTENTE se $T^2 = T$, isto é, quando $T \circ T\ (v) = T(v)$ para todo $v \in V$.

a) Seja T idempotente. Encontre seus autovalores.

b) Encontre uma matriz $A = [T]$, $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, com T idempotente, não-nulo e $A \neq I$.

c) Mostre que todo operador linear idempotente é diagonalizável.

9) Mostre que $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, mas se A representar, numa certa base, um operador linear $T : V \to V$, onde V é um **espaço vetorial complexo**, então T é diagonalizável. Obtenha ainda uma matriz , **sobre** $\mathbb{C}$, diagonal e que seja semelhante à matriz A.

10) Utilize a forma diagonal para obter A^n (n natural) nos seguintes casos

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Sugestão: Ache uma matriz B semelhante à matriz A ($A = P^{-1}.B.P$) tal que seja fácil de calcular B^n (busque B diagonal) e observe que $A^n = (P^{-1}.B.P)^n = P^{-1}.B^n.P$.

4.5 Matriz companheira

Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio cujo coeficiente do termo de mais alto grau é igual a 1.

Chama-se MATRIZ COMPANHEIRA DE f (ou matriz associada ao polinômio f) à $n \times n$ matriz quadrada C_f onde todos os elementos da "subdiagonal principal" ("paralela" à principal e logo abaixo) são iguais a 1, cuja última coluna é formada pelos opostos dos coeficientes de $f(x)$ e tal que todos os seus demais elementos são nulos, da seguinte forma:

$$C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Exemplo: Encontre a matriz companheira de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Propriedade: O polinômio minimal e o polinômio característico da matriz companheira de f são iguais ao próprio polinômio f.

Exercício: Obtenha a matriz companheira e verifique a propriedade acima para

$f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^3 + x^2 - x + 15$ e $h(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$.

4.6 A forma canônica de Jordan

Já vimos que, para certos operadores lineares $T : V \to V$, é possível obter uma base β de V tal que a matriz representante de T nesta base $\left([T]_\beta^\beta \right)$ é uma matriz diagonal (são os operadores diagonalizáveis).

Quando T não é diagonalizável veremos que, sob certas condições, é possível obter uma base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ tenha ainda uma "forma simples", a chamada Forma de Jordan.

Teorema 4.12. (Forma Canônica de Jordan)
Sejam $T : V \to V$ *um operador linear sobre um espaço* V *de dimensão finita (* $\dim V = n$ *) e* $A = [T]$.

Suponhamos que seu polinômio característico seja da forma:
$p_T(x) = p_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}.(x - \lambda_2)^{d_2} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *autovalores* $(d_1 + d_2 + \dots + d_k = n)$.

Seja seu polinômio minimal dado por

$m_T(x) = m_A(x) = (x - \lambda_1)^{r_1}.(x - \lambda_2)^{r_2} \dots (x - \lambda_k)^{r_k}$,

com $r_i \le d_i \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, k$.

Então...

Exemplo (para ilustrar) :

Forma canônica de Jordan: (cont.)
... existe uma base β *de* V *tal que* $B = [T]_\beta^\beta$ *é uma matriz DIAGONAL POR BLOCOS*

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \bigcirc \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & B_k \end{bmatrix}$$

onde cada bloco B_i *tem ordem* d_i *e está relacionado com o autovalor* λ_i *, conforme veremos a seguir.*

(1) *Cada bloco* B_i *é diagonal por blocos*

$$B_i = \begin{bmatrix} J_1^{(i)} & & & \bigcirc \\ & J_2^{(i)} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & J_{l_i}^{(i)} \end{bmatrix}$$

onde cada bloco $J^{(i)}$ *é da forma*

$$J^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

e chamado Matriz Elementar de Jordan com valor característico λ_i*.*

(2) *O bloco* $J^{(i)}$ *de maior ordem é uma matriz* $r_i \times r_i$ *(*r_i *é o expoente de* $(x - \lambda_i)$ *no polinômio minimal) e costumamos escrever os blocos* $J^{(i)}$ *em ordem decrescente de tamanho.*

(3) *O número de blocos* $J^{(i)}$ *que formam a matriz* B_i *é dado por* $\dim V_{\lambda_i}$ *(dimensão do subespaço associado ao autovalor* λ_i*)*

A matriz B *é dada, a menos da ordem dos blocos, de modo único e é dita estar sob a Forma de Jordan. Dizemos que a matriz* B *é a Forma de Jordan da matriz* A*.*

Este resultado vale para espaços V (ou matrizes A) reais ou complexos.

No caso real, contanto que o polinômio característico seja fatorado como um produto de fatores lineares (e reais).

Exemplos:

A) Seja $T : V \to V$ um operador linear cujos polinômios característico $p_T(x)$ e minimal $m_T(x)$ são dados por

$$p_T(x) = (x-3)^4(x+1)^3 \qquad \text{e} \qquad m_T(x) = (x-3)^2(x+1)^2 \ .$$

Determine as possíveis Formas de Jordan para as matrizes representantes de T .

B) Seja $T : V \to V$ um operador linear cujos polinômios característico $p_T(x)$ e minimal $m_T(x)$ são dados por

$$p_T(x) = (x-2)^4(x-7)^4 \qquad \text{e} \qquad m_T(x) = (x-2)(x-7)^3 \ .$$

Determine as possíveis Formas de Jordan para as matrizes representantes de T .

C) Obtenha a Forma Canônica de Jordan B da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercícios:

1) Determine as Formas de Jordan possíveis para as matrizes representantes de um operador linear $T : V \to V$ (definido sobre um espaço vetorial real V de dimensão finita) cujos polinômios característico $p_T(x)$ e minimal $m_T(x)$ sejam dados por:

(a) $p_T(x) = (x+1)^5(x-2)^3$, $\quad m_T(x) = (x+1)^3(x-2)^3$.

(b) $p_T(x) = (x-5)^3(x+3)^2(x-4)^3$, $\quad m_T(x) = (x-5)(x+3)^2(x-4)^2$.

(c) $p_T(x) = (x+2)^7(x-3)^4$, $\quad m_T(x) = (x+2)^3(x-3)^2$.

2) Obtenha as Formas Canônicas de Jordan das matrizes do exercício 3 da Seção 4.2 .

3) Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear, $A = [T]$ (matriz representante de T em relação á base canônica do $\mathbb{R}^n$).

Seja $m_T(x) = m_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_k)$ ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, distintos) o polinômio minimal de T (ou de A).

Um teorema garante que T é diagonalizável (ou seja, existe uma base β, de autovetores, de modo que $[T]^\beta_\beta$ é diagonal).

Justifique este fato utilizando o teorema da Forma Canônica de Jordan.

4) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Obtenha o polinômio característico $p_A(x)$ e o polinômio minimal $m_A(x)$ da matriz A e observe que, sobre o corpo dos REAIS, não estamos em condições de aplicar o teorema da Forma de Jordan. Considerando agora o corpo dos números COMPLEXOS, obtenha a Forma Canônica de Jordan da matriz A.

5) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Utilize o teorema da Forma Canônica de Jordan para obter DIRETAMENTE os polinômios característico e minimal de A e verifique o resultado.

Capítulo 5

Espaços com Produto Interno

Neste capítulo introduzimos o conceito de Produto Interno e alguns exemplos e tópicos básicos relacionados, como ortogonalidade, a norma proveniente de um produto interno, ortogonalização, projeção ortogonal e complemento ortogonal.

5.1 Produto interno

Definição 5.1. *Seja* V *um* **espaço vetorial real**. *Um PRODUTO INTERNO sobre* V *é uma função que associa a cada par de vetores* $v_1, v_2 \in V$ *um escalar* $< v_1, v_2 > \in \mathbb{R}$ *chamado* **o produto interno de** v_1 **por** v_2*, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

p.i.1) $< \lambda . v_1 + v_2, v_3 > = \lambda . < v_1, v_3 > + < v_2, v_3 >\ ,\ v_1, v_2, v_3 \in V\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$;

p.i.2) $< v, v > \geq 0 \quad \forall\, v \in V$;

p.i.3) $< v, v > = 0 \ \Rightarrow\ v = 0$;

p.i.4) $< v_1, v_2 > = < v_2, v_1 > \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$.

Obs.: Se V for um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ então a condição p.i.4 para que se tenha um produto interno deve ser: $< v_1, v_2 > = \overline{< v_2, v_1 >} \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$. Salvo menção em contrário, sempre trabalharemos neste capítulo com espaços vetoriais reais (sobre $\mathbb{R}$).

Exemplos:

A) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Dados $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, definamos:

$$< u, v > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ .$$

Temos que $<\ ,\ >$ definido desta forma é um produto interno sobre o $\mathbb{R}^3$, conhecido como **Produto Interno Usual (ou Canônico) do** $\mathbb{R}^3$.

B) Seja $V = \mathbb{R}^n$. Dados $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos:

$$< u, v > =\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \quad (\textbf{Produto Interno Usual do } \mathbb{R}^n).$$

C) Seja $V = \mathbb{R}^2$. Dados $u = (x_1, y_1),\ v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, defina:

$$< u, v > =\ 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2\ .$$

Exercício: Verifique que $<\ ,\ >$ acima definido é um produto interno sobre o $\mathbb{R}^2$.

D) Seja $V = C[a, b]$ o espaço das funções reais contínuas definidas no intervalo $[a, b]$:

$$V = \{\ f : [a, b] \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ é contínua }\}\ .$$

Dadas $f, g \in C[a, b]$, defina

$$< f, g > = \int_a^b f(x).g(x)\ dx\ .$$

Temos que $<\ ,\ >$ acima definido é um produto interno sobre V. (Verifique!)

E) Seja $V = C_{\text{per}}[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e periódicas de período $T > 0$:

$$V = C_{\text{per}}\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] = \{\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f(x+T) = f(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \}\ .$$

Dadas $f, g \in C_{\text{per}}[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, temos o seguinte produto interno sobre V:

$$< f, g > = \int_{-T/2}^{T/2} f(x).g(x)\ dx\ .$$

F) Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço das 2×2 matrizes reais:

$$V = M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\ ;\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

Dadas $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in V$, definamos

$$< A, B > =\ ae + 2bf + 3cg + dh\ .$$

$<\ ,\ >$ acima definido é um produto interno sobre $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (Verifique!)

G) (Um exemplo mais geral) Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e Q uma $n \times n$ matriz invertível (fixa).

Dados $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos:

$$< u, v > = [u]^t_\beta . Q^t . Q . [v]_\beta = (x_1, x_2, \ldots, x_n) . Q^t . Q . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^n$).

Obs.: Note que se $Q = I$ ($n \times n$ matriz identidade), então temos em particular o Produto Interno Usual no $\mathbb{R}^n$.

Exercício: Mostre que a função acima definida é um produto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

Algumas propriedades imediatas:

Se V é um espaço vetorial (real) com produto interno $< , >$, então:

(i) $< 0, v > = 0 \quad \forall v \in V$;

(ii) $< \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n, v > = \alpha_1 < u_1, v > + \ldots + \alpha_n < u_n, v >$;

(iii) $< \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n\, , \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m > = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j < u_i, v_j >$.

Obs.: Um produto interno $< , >$ sobre um espaço vetorial V nos permite criar toda uma "GEOMETRIA" para o espaço V, generalizando uma série de idéias já estudadas, conforme veremos nas próximas seções.

5.2 Ortogonalidade

Definição 5.2. *Seja V um espaço vetorial V munido de um produto interno $< , >$. Dizemos que dois vetores u, $v \in V$ são ORTOGONAIS quando $< u, v > = 0$. Escreve-se neste caso: $u \perp v$ (ou $v \perp u$).*

Um subconjunto $S \subset V$ é dito ser um CONJUNTO ORTOGONAL de vetores quando seus vetores são dois a dois ortogonais.

Obs.: É importante ressaltarmos que o conceito de ortogonalidade **depende do produto interno $< , >$ considerado**.

Exemplos:

A) Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido com o Produto Interno Usual $< \, , \, >$.
Os vetores $u = (3, -2, 1)$ e $v = (0, 4, 8)$ são ortogonais.

B) Seja $V = \mathbb{R}^n$ munido com o Produto Interno Usual $< \, , \, >$.

É imediato que sua base canônica

$$\alpha = \{ \ (1,0,0,\ldots,0), \ (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \ (0,0,0,\ldots,1) \ \}$$

é um conjunto ortogonal (pois seus vetores são dois a dois ortogonais).

C) Seja $V = C[-\pi, \pi] = \{ \ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \ ; \ f$ é contínua $\}$ munido do produto interno

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x).g(x) \, dx \qquad \forall \ f, g \in V \ .$$

Sendo $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, temos:

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x . \cos x \, dx \ = \ 0 \ . \qquad \text{(Verifique!)}$$

Portanto $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ são ortogonais em $C[-\pi, \pi]$.

D) Seja $V = C_{\text{per}}[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \ = \ \{ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f(x+T) = f(x) \ \ \forall \ x \in \mathbb{R} \ \}$ o espaço das funções contínuas e periódicas de período $T > 0$, munido do produto interno

$$< f, g > = \int_{-T/2}^{T/2} f(x).g(x) \, dx \qquad \forall \ f, g \in V \ .$$

O conjunto $S = \{1, \ \cos wx, \ \operatorname{sen} wx, \ \cos 2wx, \ \operatorname{sen} 2wx, \ldots\}$, onde $w = \dfrac{2\pi}{T}$, é um conjunto ortogonal de vetores (funções) em $V = C_{\text{per}}[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. (Tente provar!)

Algumas propriedades imediatas:

Se V é um espaço vetorial com produto interno $< \, , \, >$, então:

(i) $0 \perp v$ para todo $v \in V$.

Pois $< 0, v > = < 0.v, v > = \ 0 \, . < v, v > = \ 0 \quad \forall \ v \in V$.

(ii) Se $u \perp v$ e $w \perp v$ então $(\alpha u + \beta w) \perp v$ para todos $\alpha, \ \beta \ \in \mathbb{R}$.

De fato: $< \alpha u + \beta w, v > = \ \alpha < u, v > + \beta < w, v > = \ 0 + 0 \ = \ 0.$

(iii) Se $u \perp v$ para todo $v \in V$ então $u = 0$ (vetor nulo).

De fato: como $u \perp v$ para todo $v \in V$, temos então que, em particular,

$u \perp u \Rightarrow < u, u > = 0 \Rightarrow u = 0$ (pela condição p.i.3 na definição de produto interno).

Teorema 5.3. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $< \, , \, >$. Se $S \subset V$ é um conjunto* **ortogonal** *de vetores* **não-nulos***, então S é linearmente independente (LI).*

Demonstração:

Seja $S \subset V$ um conjunto ortogonal de vetores não-nulos em V.

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k \in S$ e $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0 \quad \text{(vetor nulo)}.$$

Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ temos:

$$\begin{aligned} 0 &= < 0, v_i > = < c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k, v_i > = \\ &= c_1 < v_1, v_i > + c_2 < v_2, v_i > + \ldots + c_k < v_k, v_i > = \; c_i < v_i, v_i > , \end{aligned}$$

pois: S ortogonal $\Rightarrow < v_j, v_i > = 0$ se $j \neq i$.

Como os vetores de S são não-nulos, então $< v_i, v_i > \neq 0$. Logo $c_i = 0$.

Assim $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ e portanto S é um conjunto linearmente independente. ■

Consequência da demonstração acima:

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $< \, , \, >$.

Se um vetor $w \in V$ é combinação linear de um conjunto ortogonal, finito, de vetores não-nulos $v_1, v_2, \ldots, v_k$, ou seja, $w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k$, então cada coeficiente c_i da combinação é dado diretamente por

$$c_i = \frac{< w, v_i >}{< v_i, v_i >} \quad \text{(Coeficientes de Fourier)}.$$

De fato, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, temos:

$$\begin{aligned} < w, v_i > &= < c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k, v_i > = \\ &= c_1 < v_1, v_i > + c_2 < v_2, v_i > + \ldots + c_k < v_k, v_i > = \\ &= c_i < v_i, v_i > , \end{aligned}$$

pois $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é ortogonal.

Portanto temos $c_i = \dfrac{< w, v_i >}{< v_i, v_i >}$, pois $v_i \neq 0$. ■

Exemplo: Considerando o Produto Interno Usual em $\mathbb{R}^2$, temos que o conjunto $\beta = \{ \ (3,-2), (6,9) \ \}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Escrevamos, por exemplo, $w = (1,2)$ como combinação linear de $v_1 = (3,-2)$ e $v_2 = (6,9)$.

Moral da estória: é muito bom que tenhamos um vetor como combinação linear de um conjunto ortogonal de vetores não-nulos.

Em particular, é ótimo termos, em um espaço vetorial V com produto interno, uma BASE ORTOGONAL (seus vetores são dois a dois ortogonais), pois neste caso qualquer vetor de V é uma combinação linear dos vetores desta base e os coeficientes são obtidos diretamente.

5.3 Norma

Definição 5.4. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $< \, , \, >$. A partir do produto interno $< \, , \, >$ podemos construir uma função que associa a cada vetor $v \in V$ um número real $\|v\| \geq 0$ dado por*

$$\|v\| \ = \ \sqrt{< v, v >} \ ,$$

que chamaremos de NORMA de v.

Obs.: O conceito de norma generaliza o conceito de comprimento de um vetor !

Exemplos:

A) Se $V = \mathbb{R}^3$ e $< \, , \, >$ é o Produto Interno Usual, então, dado $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\|v\| \ = \ \sqrt{< v, v >} \ = \ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(neste caso particular, a norma coincide com o módulo do vetor estudado na Geometria Analítica).

B) Seja $V = C_{\text{per}}[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \ = \ \{ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f(x+T) = f(x) \ \ \forall \, x \in \mathbb{R} \ \}$ o espaço das funções contínuas e periódicas de período $T > 0$, munido do produto interno

$$< f, g > = \int_{-T/2}^{T/2} f(x).g(x) \, dx \qquad \forall \, f, g \in V \, .$$

Calcule $\|f\|$, se $f \in S = \{ \ 1, \cos wx, \ \operatorname{sen} wx, \cos 2wx, \ \operatorname{sen} 2wx, \ldots \ \}$ $\left(w = \dfrac{2\pi}{T} \right)$.

C) Se $w = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não-nulos, então:

$$c_i = \frac{< w, v_i >}{< v_i, v_i >} = \frac{< w, v_i >}{\|v_i\|^2} \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k\ .$$

Propriedades (mais importantes) da norma:

Se V é um espaço vetorial com produto interno $< \, , \, >$ e $\| \ \|$ é a norma construída a partir deste produto interno, então:

(i) $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$.

$\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$ (vetor nulo).

(ii) $\|\alpha.v\| = |\alpha| \, . \, \|v\|$ quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

De fato:

$\|\alpha.v\| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha^2 < v, v >} = \sqrt{\alpha^2}\,.\sqrt{< v, v >} = |\alpha| \, . \, \|v\|\ .$ ■

(iii) Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|< u, v >| \leq \|u\| \, . \, \|v\| \qquad \forall\, u, v \in V\ .$$

De fato, sejam dados $u, v \in V$.

Para todo $t \in \mathbb{R}$, temos:

$0 \leq \|u + tv\|^2 = < u + tv, u + tv > = < u, u > + 2t < u, v > + t^2 < v, v >\ .$

Fazendo: $< v, v > = a$, $2 < u, v > = b$ e $< u, u > = c$, temos:

$$at^2 + bt + c \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\ .$$

Sabemos então (pelo estudo do sinal da expressão $at^2 + bt + c$) que $\triangle = b^2 - 4ac \leq 0$, ou seja:

$4 < u, v >^2 - 4 < v, v > . < u, u > \leq 0 \ \Rightarrow \ < u, v >^2 \leq \|u\|^2 . \|v\|^2 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ |< u, v >| \leq \|u\| \, . \, \|v\|\ .$ ■

(iv) Desigualdade Triangular:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad \forall\, u, v \in V\ . \quad \text{(Exercício)}$$

A partir da norma $\| \ \|$ podemos construir naturalmente uma métrica d em V, que é uma função que associa a cada par de vetores $u, v \in V$ um número real $d(u,v) \geq 0$ dado por $d(u,v) = \|u - v\|$, chamado a DISTÂNCIA entre u e v e satisfazendo às seguintes condições (Mostre!):

(i) $d(u,v) \ \geq \ 0$ para todos $u, v \in V$.

$d(u,v) \ = \ 0$ se, e somente se, $u = v$.

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$.

(iii) $d(u,v) \ \leq \ d(u,w) \ + \ d(w,v) \qquad \forall \, u, v, w \in V$.

Teorema 5.5. *("Teorema de Pitágoras" Generalizado) Seja V um espaço vetorial com produto interno $< \, , \, >$ e seja $\| \ \|$ a norma proveniente deste produto interno.*
Se $u, v \in V$ são vetores ortogonais ($u \perp v$) então:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \ .$$

De fato:
$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \ < u+v, u+v > = < u,u > + 2 < u,v > + < v,v > = \\ &= \ \|u\|^2 + \|v\|^2 \ . \end{aligned}$$

Esta é de fato uma generalização do famoso Teorema de Pitágoras, para espaços V com produto interno em geral, pois no caso de $V = \mathbb{R}^2$ com Produto Interno Usual temos exatamente o referido Teorema, como estudado na Geometria.

Temos ainda que, em geral, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um conjunto ortogonal, então:

$$\|v_1 + v_2 + \ldots + v_k\|^2 \ = \ \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \ldots + \|v_k\|^2 \ .$$

5.4 Ângulo entre dois vetores

Seja V um espaço vetorial com produto interno $< \, , \, >$ e uma norma $\| \ \|$ (construída a partir deste produto interno).

Dados dois vetores não-nulos $u, v \in V$, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz fornece:

$$|< u,v >| \ \leq \ \|u\| \, . \, \|v\| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{< u,v >}{\|u\| \, . \, \|v\|} \right| \ \leq \ 1 \quad \text{, ou melhor:} \quad -1 \ \leq \frac{< u,v >}{\|u\| \, . \, \|v\|} \ \leq 1 \ .$$

Existe portanto um único ângulo θ entre 0 e π radianos tal que:

$$\cos\theta = \frac{< u,v >}{\|u\| \, . \, \|v\|} \ .$$

Definimos este como sendo o ângulo entre u e v.

Obs.: Note que essa é uma generalização do conceito de ângulo entre vetores, pois no caso particular de $V = \mathbb{R}^2$ ou $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual, o conceito aqui definido coincide com o conceito de ângulo entre dois vetores normalmente utilizado.

5.5 Ortogonalização; Projeção ortogonal: a melhor aproximação; Complemento ortogonal

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $< , >$ e uma norma $\| \ \|$ construída a partir deste produto interno.

Definição 5.6. *Se $\|v\| = 1$ então dizemos que v é um VETOR UNITÁRIO, ou então que v está NORMALIZADO.*

Qualquer vetor não-nulo v pode "ser normalizado", ou seja, podemos obter um múltiplo escalar positivo $u = \alpha.v$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$ tal que $\|u\| = 1$, bastando para isso tomar $u = \dfrac{v}{\|v\|}$.

Um conjunto $S \subset V$ é dito ORTONORMAL quando é ortogonal e todos os seus vetores são unitários (ou seja, têm norma igual a 1).

Por exemplo, considerando em $V = \mathbb{R}^n$ o Produto Interno Usual, temos que a base canônica, dada por $\alpha = \{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$ é um conjunto ortonormal.

Obs.: É bom termos um vetor w como combinação linear de um conjunto ortonormal de vetores: $w = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k$, com $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ortonormal, pois neste caso os coeficientes $c_1, \ldots, c_k$ são dados facilmente por

$$c_i = \frac{< w, v_i >}{< v_i, v_i >} = \frac{< w, v_i >}{\|v_i\|^2} = < w, v_i > \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k\ .$$

Em particular, é ótimo que tenhamos, em um espaço V com produto interno $< , >$, uma BASE ORTONORMAL, pois todos os vetores de V poderão ser escritos como combinação linear dos vetores desta base e os coeficientes são dados diretamente !!!

Caminhando nesta direção, veremos a seguir um método para obter, a partir de uma base dada em um espaço V de dimensão finita com produto interno, uma base ortogonal para este espaço. A partir daí, basta "normalizarmos" cada vetor desta base ortogonal para que tenhamos uma base ortonormal.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt:

Teorema 5.7. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno $<\,,\,>$. Então, a partir de qualquer base $\beta = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ de V dada, podemos obter uma nova base $\beta' = \{ v_1', v_2', \ldots, v_n' \}$, β' ORTOGONAL, para V.*

Demonstração:

Definamos inicialmente:

$$v_1' = v_1 \quad \text{e} \quad v_2' = v_2 - \frac{< v_2, v_1' >}{< v_1', v_1' >} v_1' \,.$$

Temos:

$$[v_1', v_2'] = [v_1, v_2] \quad \text{e} \quad < v_2', v_1' > = < v_2, v_1' > - \frac{< v_2, v_1' >}{< v_1', v_1' >} < v_1', v_1' > = 0 \,.$$

Logo $v_2' \perp v_1'$ e $\beta_2 = \{v_1', v_2'\}$ é uma base ortogonal para o espaço $[v_1, v_2]$.

Consideremos agora

$$v_3' = v_3 - \left(\frac{< v_3, v_1' >}{< v_1', v_1' >} v_1' + \frac{< v_3, v_2' >}{< v_2', v_2' >} v_2' \right) .$$

Temos então $v_3' \perp v_1'$, $v_3' \perp v_2'$ e $[v_1', v_2', v_3'] = [v_1, v_2, v_3]$.

Assim, $\beta_3 = \{v_1', v_2', v_3'\}$ é uma base ortogonal para o espaço $[v_1, v_2, v_3]$.

Prosseguindo desta forma, após um número finito (n) de passos, obtemos uma base ortogonal $\beta_n = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ para o espaço $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$. ■

Obs.: Um aspecto muito interessante da demonstração acima é que ela fornece um método para a obtenção da base ortogonal $\beta' = \{ v_1', v_2', \ldots, v_n' \}$ a partir da base β.

Exemplos:

1) Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido do Produto Interno Usual $<\,,\,>$. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha a partir de $\beta = \{(1,2), (2,1)\}$ uma base ortogonal β' de $\mathbb{R}^2$.

2) Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $<\,,\,>$. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha a partir da base $\beta = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,2,0)\}$ uma base ortogonal β' de $\mathbb{R}^3$.

Exercícios:

1) Seja $V = \mathbb{R}^2$. Dados $u = (x_1, y_1),\ v = (x_2, y_2) \in V$, defina

$$< u, v > = \ 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2 \ .$$

(a) Mostre que $< \, , \, >$ acima definido é um produto interno.

(b) Obtenha os ângulos entre os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(c) Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha a partir da base $\beta = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^2$, **em relação ao produto interno acima definido**.

2) Determine uma base ortonormal (em relação ao Produto Interno Canônico) para o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$V = \left\{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - y + z = 0 \ \right\} \ .$$

3) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Dados $u = (x_1, y_1, z_1),\ v = (x_2, y_2, z_2) \in V$, defina

$$< u, v > = \ x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2z_1z_2 \ .$$

(a) Mostre que $< \, , \, >$ acima definido é um produto interno.

(b) Obtenha, usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a partir da base canônica, uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^3$, **em relação ao produto interno acima definido**.

4) Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções polinomiais reais de grau menor ou igual a dois. Dados $f, g \in V$, defina o produto interno

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t).g(t) \ dt \ .$$

Se W é o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ gerado pelos vetores $p(t) = 1$ e $q(t) = 1 - t$, determine uma base ortogonal para W.

5) Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das 2×2 matrizes reais.

Dadas $A, B \in V$, defina o produto interno

$$< A, B > = \ \mathrm{tr}\,(B^t.A) \qquad \text{onde tr é o traço} \ .$$

Obtenha uma base ortogonal de V, segundo este produto interno, a partir da base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Obtenha o ângulo entre as duas últimas matrizes da base acima.

6) A partir do exemplo G) da Seção 5.1, construa um produto interno, diferente do Produto Interno Usual, sobre o $\mathbb{R}^2$ e repita os ítens (b) e (c) do primeiro exercício desta lista, **considerando o produto interno construído**.

Projeção ortogonal: a melhor aproximação

Sejam V um espaço vetorial com um produto interno $<\ ,\ >$, $\|\ \|$ a norma construída a partir deste produto interno e $W \subset V$ um subespaço de V tal que W tem dimensão finita.

Fixemos uma base ORTOGONAL $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ do subespaço W.

Podemos então construir uma transformação linear (verifique) $P_W : V \to W$, definindo

$$P_W(v) \ = \ \frac{< v, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 + \frac{< v, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 + \ldots + \frac{< v, w_k >}{< w_k, w_k >} w_k \qquad \forall\, v \in V\ .$$

P_W é chamada a PROJEÇÃO ORTOGONAL DE V SOBRE W:

A utilidade marcante da projeção ortogonal $P_W : V \to W$ acima definida é que, dado um vetor $v \in V$, $P_W(v)$ **é a melhor aproximação de v no subespaço W, segundo a norma $\|\ \|$ construída a partir do produto interno $<\ ,\ >$ considerado**.

A seguir veremos resultados que provarão tal afirmativa:

Proposição 5.8. *Para todo vetor* $w \in W$ *tem-se:* $v - P_W(v) \perp w$.

Demonstração:

Dado $w \in W$, como $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ é base ortogonal de W, temos:

$$w \ = \ \frac{< w, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 + \frac{< w, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 + \ldots + \frac{< w, w_k >}{< w_k, w_k >} w_k\ .$$

Então $< v - P_W(v), w > =$

$$= \ < v - \left[\frac{< v, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 + \ldots + \frac{< v, w_k >}{< w_k, w_k >} w_k \right] \ , \ \frac{< w, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 + \ldots + \frac{< w, w_k >}{< w_k, w_k >} w_k > =$$

$$= \ \frac{< w, w_1 >}{< w_1, w_1 >} < v, w_1 > + \ldots + \frac{< w, w_k >}{< w_k, w_k >} < v, w_k > \ -$$

$$- \ \frac{< v, w_1 >}{< w_1, w_1 >} < w, w_1 > - \ldots - \frac{< v, w_k >}{< w_k, w_k >} < w, w_k > = \ 0 \ .$$

Portanto: $< v - P_W(v), w > = \ 0$ para todo $w \in W$. ■

Proposição 5.9. *Para todo vetor* $w \in W$ *temos:* $\|v - P_W(v)\| \ \leq \|v - w\|$.

Demonstração:

Seja $w \in W$. Como $P_W(v) \in W$ e W é subespaço vetorial de V, então podemos concluir que $P_W(v) - w \in W$.

Pela proposição anterior, temos que $v - P_W(v) \perp P_W(v) - w$.

Então, pelo Teorema de Pitágoras generalizado (Teorema 5.5) temos:

$$\|v - w\|^2 = \|v - P_W(v) + P_W(v) - w\|^2 = \|v - P_W(v)\|^2 + \|P_W(v) - w\|^2 \geq \|v - P_W(v)\|^2 \ .$$

Portanto $\|v - w\| \ \geq \ \|v - P_W(v)\|$, dado qualquer $w \in W$. ■

Obs.: A segunda proposição diz que a distância entre v e $P_W(v)$ é menor ou igual à distância de v a qualquer vetor $w \in W$, ou seja, $P_W(v)$ **é o vetor de** W **que está mais próximo do vetor** v (segundo a norma $\| \ \|$ construída a partir do produto interno considerado).

Exemplos:

1) Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $<\ ,\ >$ e a norma construída a partir deste. Qual o vetor do subespaço $W = \left\{\ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\ \right\} \subset \mathbb{R}^3$ mais próximo do vetor $v = (3, -5, 2)$ segundo a norma considerada ?

2) Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $<\ ,\ >$. Qual o vetor do subespaço $W = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)] \subset V$ mais próximo do vetor $v = (3, -5, 2)$?

Complemento ortogonal:

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $<\ ,\ >$.

Definição 5.10. *Dado um subconjunto não-vazio $S \subset V$, definimos:*

$$S^{\perp}\ =\ \{\ v \in V\ ;\ v \text{ é ortogonal a todos os vetores de } S\ \}\ .$$

$S^{\perp}$ (lê-se "S perp") é um subespaço de V (exercício), chamado o COMPLEMENTO ORTOGONAL de S.

Exemplo:

Sejam $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $<\ ,\ >$ e $S = \{(2, 1, 2)\}$. Determine $S^{\perp}$.

Recordações:

Seja V um espaço vetorial e sejam U, W subespaços de V.

A soma dos subespaços U e W é um subespaço de V, dado por

$$U + W = \{u + w\ ;\ u \in U\ ,\ w \in W\}\ .$$

Se U e W têm dimensão finita, temos: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Uma situação especial nos interessa: dizemos que V é a SOMA DIRETA de seus subespaços U e W e escrevemos $V = U \oplus W$ quando todo vetor $v \in V$ escreve-se de modo único como $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.

Isto equivale a dizer que $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

Se $\dim V < +\infty$ (finita) temos neste caso ($V = U \oplus W$): $\dim V = \dim U + \dim W$.

Teorema 5.11. *Se W é um subespaço de dimensão finita de V, então:*

$$V \;=\; W \oplus W^{\perp}$$

Demonstração:

Seja dado $v \in V$.

Pelo Proposição 5.8, temos: $v - P_W(v) \perp w \qquad \forall\, w \in W$.

Logo $v - P_W(v) = u \in W^{\perp} \;\Rightarrow\; v = P_W(v) + u$, onde $P_W(v) \in W$ e $u \in W^{\perp}$.

Assim, qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito como a soma de um vetor de W com um vetor de $W^{\perp}$ e desta forma temos que $V = W + W^{\perp}$.

Dado $w \in W \cap W^{\perp}$, temos: $w \in W^{\perp} \;\Rightarrow\; w$ é ortogonal a todo vetor de W .

Como $w \in W$ temos então $w \perp w \;\Rightarrow < w, w > = \; 0 \;\Rightarrow\; w = 0$ (vetor nulo).

Logo $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Pelo exposto acima, podemos concluir que $V = W \oplus W^{\perp}$. ■

Exemplo:

Sejam $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e $W = [(1,1,0), (2,-1,3)]$.

Determine $W^{\perp}$ e uma base para $W^{\perp}$.

Exercícios:

1) Consideremos o espaço $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e o subespaço $W = [(1,2,0), (-1,-1,1), (-2,-1,3)] \subset \mathbb{R}^3$.

Obtenha o vetor de W que está mais próximo de $v = (1,1,2)$ com relação à norma construída a partir de $< \, , \, >$.

Determine também $W^{\perp}$ e uma base ortogonal para $W^{\perp}$.

2) Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e considere os subespaços

$$W_1 = [(0,1,1), (1,1,1)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(0,1,0), (2,0,1)] \; .$$

(a) Obtenha o vetor de W_1 que está mais próximo do vetor $v = (2,2,3)$.

(b) Obtenha o vetor de W_2 que está mais próximo do vetor $v = (2,2,3)$.

(c) De qual subespaço o vetor $v = (2,2,3)$ está mais próximo: W_1 ou W_2 ?

(Sugestão: Calcule as distâncias de v aos vetores de W_1 e W_2 dos quais ele está mais próximo)

3) Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ (polinômios de grau menor ou igual a 2) munido do produto interno dado por:

$$< f, g > = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx \ .$$

Se $W = \left[1, 1 + 3x^2\right]$, obtenha o vetor de W que está mais próximo de $p = x + 2$ em relação à norma construída a partir do produto interno dado. Obtenha também $W^\perp$.

4) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ e seja $W = \ker T$. Encontre uma base ortonormal para $W^\perp$ (em relação ao Produto Interno Usual).

5) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e $W = [(1, 0, 1), (1, 1, 0)]$. Determine $W^\perp$ e uma base para $W^\perp$.

Refaça o exercício considerando o produto interno dado por

$$< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) > = \ 2x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \ .$$

5.6 Tipos especiais de operadores lineares

PARTE A) OPERADORES AUTO-ADJUNTOS:
(aparecem naturalmente em problemas que envolvem SIMETRIA)

1) Matrizes Simétricas:

Uma $n \times n$ matriz real A é dita SIMÉTRICA quando $A^t = A$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

2) Operadores Auto-Adjuntos:

Seja V um espaço vetorial (real) de dimensão finita com um produto interno $< \, , \, >$. Um operador linear $T : V \to V$ é dito AUTO-ADJUNTO quando a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ for simétrica, **sendo** α **uma base ortonormal de** V.

Exemplo: Consideremos $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (-2x, 6y + z, y + 3z) \quad \forall \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Então T é um operador auto-adjunto.

3) Alguns resultados importantes:

Teorema 5.12. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno $< \, , \, >$ e $T : V \to V$ um operador auto-adjunto. Então:*

$$< T(v), w > = < v, T(w) > \qquad \forall \; v, w \in V \; .$$

Consequência: Autovetores associados a autovalores distintos (no caso de operadores auto-adjuntos) são ortogonais.

De fato:

Sejam u e v autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, para um determinado operador auto-adjunto $T : V \to V$.

Temos

$$\lambda_1 < u, v > = < \lambda_1 u, v > = < Tu, v > = < u, Tv > = < u, \lambda_2 v > = \; \lambda_2 < u, v > \; .$$

Então $(\lambda_1 - \lambda_2) < u, v > = \; 0 \; \Rightarrow \; < u, v > = \; 0$ (pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Portanto $u \perp v$.

Teorema 5.13. *(Diagonalização de operadores auto-adjuntos)*

Se $T : V \to V$ é um operador auto-adjunto então T é diagonalizável e é possível obter uma base ortogonal (até ortonormal se assim preferir) de autovetores.

Exemplo: Consideremos $V = \mathbb{R}^3$ munido do Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z) \quad \forall \; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; .$$

Vamos verificar que T é um operador auto-adjunto e obter uma base ortogonal de autovetores para o $\mathbb{R}^3$.

PARTE B) OPERADORES ORTOGONAIS:

(aparecem em problemas que envolvem MOVIMENTOS RÍGIDOS: rotação, reflexão, etc.)

1) Matrizes Ortogonais:

Uma $n \times n$ matriz real A é dita ORTOGONAL quando $A^t.A = A.A^t = I$.

Exemplos: $$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposição 5.14. *Se* A *é uma matriz ortogonal, então* $\det A = \pm 1$. *(Prove)*

Teorema 5.15. *Uma* $n \times n$ *matriz real* A *é ortogonal se, e somente se, suas colunas, vistas como vetores de* $\mathbb{R}^n$*, formam um conjunto ortonormal quando se considera o Produto Interno Usual.*

Teorema 5.16. *Sejam* V *um espaço vetorial (real) de dimensão finita, com produto interno, e* α *e* β *duas bases ortonormais de* V*. Então a matriz de mudança de base* $[I]_\beta^\alpha$ *é uma matriz ortogonal.*

2) Operadores Ortogonais:

Seja V um espaço vetorial (real) de dimensão finita com um produto interno $< \, , \, >$. Um operador linear $T : V \to V$ é dito ORTOGONAL quando a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ for ortogonal, **sendo** α **uma base ortonormal de** V.

Exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^2$ munido do Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (x, -y) \ \ \forall \, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. ($T$ é a reflexão em torno do eixo Ox)

T é um operador ortogonal.

3) Um resultado importante:

Teorema 5.17. *(Caracterização dos operadores ortogonais)*

Seja $T : V \to V$ *é um operador linear sobre um espaço vetorial* V *(*$\dim V = n < +\infty$*) com produto interno* $< \, , >$*. As condições abaixo são* **equivalentes***:*

(a) T *é um operador ortogonal.*

(b) T *transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é uma base ortonormal de* V *então* $\{Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n\}$ *também é base ortonormal de* V*.*

(c) T *preserva o produto interno, ou seja,* $< Tu, Tv > = < u, v > \quad \forall \, u, v \in V$*.*

(d) T *preserva a norma, ou seja,* $\|Tv\| = \|v\| \quad \forall \, v \in V$*.*

Obs.: O resultado acima torna clara a principal característica dos operadores ortogonais, que é: geometricamente, os operadores ortogonais representam movimentos rígidos (rotação, reflexão, etc.). Note que (d) mostra claramente que a distância entre vetores é preservada por um operador linear ortogonal:

$$d(Tu, Tv) = \|Tu - Tv\| = \|T(u - v)\| \overset{(d)}{=} \|u - v\| = d(u, v) \, .$$

(a distância entre u e v é igual à distância entre Tu e Tv, para todos $u, v \in V$)

Exercícios:

1) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com o Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por $T(x, y, z) = (x + 4y + 2z, 4x - 5y - 4z, 2x - 4y + z)$. Mostre que T é auto-adjunto e obtenha uma base ortonormal de autovetores de T.

2) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com o Produto Interno Usual $< \, , \, >$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por $S(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$.
(a) Mostre que S é um operador auto-adjunto, mas não ortogonal.
(b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3, 0, 1)$, verifique que $< Sv, w > = < v, Sw >$.
(c) Obtenha uma base ortogonal de autovetores de S e a matriz que representa S em relação a esta base.

3) Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o Produto Interno Usual. Obtenha um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que seja auto-adjunto e tal que $T \neq O$ e $T \neq k.I$ (T não pode ser o operador nulo nem múltiplo do operador idêntico).

4) Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno dado por:

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) > = \; x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2 \; .$$

O operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x - y, -x + 2y)$ é auto-adjunto ?

5) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com o Produto Interno Usual $< \, , \, >$, $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base ordenada canônica do $\mathbb{R}^3$ (sabemos que β é ortonormal em relação ao Produto Interno Usual).
Sejam $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear auto-adjunto dado no exercício 2) e $A = [S]_\beta^\beta$ a matriz que representa S em relação à base canônica β.
(a) Verifique que $A_{ij} \; = < Se_j, e_i >$ para todo $i, j = 1, 2, 3$.
(b) Use a letra (a) e o fato de S ser auto-adjunto para concluir que

$$< Se_i, e_j > = < e_i, Se_j > \quad \text{para todos } \; i, j = 1, 2, 3 \; .$$

(c) **Usando a letra (b)**, verifique que $v = (2, -1, 5) = 2e_1 - e_2 + 5e_3$ e $w = (3, 0, 1) = 3e_1 + e_3$ cumprem $< Sv, w > = < v, Sw >$.
(d) Generalize a letra (c), mostrando que $< Sv, w > = < v, Sw > \; \forall v, w \in \mathbb{R}^3$.

6) Ache valores para x e y tais que $A = \begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

7) Sabemos que se A é uma matriz ortogonal então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.
Mostre que **não vale** a recíproca deste resultado exibindo uma matriz A tal que $\det A = 1$ ou $\det A = -1$ mas tal que A não seja ortogonal.

8) Se $V = \mathbb{R}^2$ com o Produto Interno Usual, obtenha duas bases ortonormais distintas α e β do $\mathbb{R}^2$ e verifique que a matriz de mudança de base $[I]^{\alpha}_{\beta}$ é uma matriz ortogonal.

9) Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V $(\dim V < +\infty)$ com um produto interno $< \, , \, >$.
(a) Mostre que se T preserva o produto interno então T preserva a norma, isto é:

$$\begin{array}{c} < Tu, Tv > = < u, v > \\ \forall\, u, v \in V \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \|Tv\| \;=\; \|v\| \\ \forall\, v \in V \end{array}$$

(b) Mostre que se T preserva a norma então T preserva o produto interno, isto é:

$$\begin{array}{c} \|Tv\| \;=\; \|v\| \\ \forall\, v \in V \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} < Tu, Tv > = < u, v > \\ \forall\, u, v \in V \end{array}$$

10) Seja $T : V \to V$ um operador ortogonal sobre um espaço vetorial (real) V de dimensão finita e com produto interno.
(a) Mostre que T é invertível.
(b) Mostre que T **preserva ângulos**, isto é, se u e v são vetores não-nulos quaisquer de V, então o ângulo entre Tu e Tv é igual ao ângulo entre u e v.

11) Obtenha a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva o segmento de extremos $(-6, 2)$ e $(-1, 2)$ no segmento de extremos $(-2, 6)$ e $(1, 2)$, respectivamente.
Considerando agora o Produto Interno Usual $< \, , \, >$ do $\mathbb{R}^2$, mostre que T é um operador ortogonal (corresponde portanto a um movimento rígido), corresponde a uma rotação e obtenha seu ângulo.

Referências

[1] Boldrini, José Luiz e outros, *Álgebra Linear*, Editora Harbra, São Paulo.

[2] Lima, Elon Lages, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro.

[3] Hoffman, K. e Kunze, R., *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo.