Propriedades:

i) Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (podendo mesmo um dos membros estar definido e o outro não).

Exemplo:

Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Então $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Note, ainda, que $\mathbf{AB} = 0$, sem que $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.
Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas:

ii) $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ (Isto justifica o nome da matriz identidade.)
iii) $\mathbf{A(B + C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma)
iv) $\mathbf{(A + B)C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma)
v) $\mathbf{(AB)C} = \mathbf{A(BC)}$ (associatividade)
vi) $\mathbf{(AB)'} = \mathbf{B'A'}$ (Observe a ordem!)
vii) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

1.4 EXERCÍCIOS

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = [2 \quad -1]$$

Encontre:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
c) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
d) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$
e) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$
f) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$
g) $-\mathbf{A}$
h) $-\mathbf{D}$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A' = A$, então $x =$ __________.

3. Se **A** é uma matriz simétrica, então $A - A' =$ __________.

4. Se **A** é uma matriz triangular superior, então A' é __________.

5. Se **A** é uma matriz diagonal, então $A' =$ __________.

6. Verdadeiro ou falso?
   a) $(-A)' = -(A')$
   b) $(A + B)' = B' + A'$
   c) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.
   d) $(k_1 A)(k_2 B) = (k_1 k_2)AB$
   e) $(-A)(-B) = -(AB)$
   f) Se **A** e **B** são matrizes simétricas, então $AB = BA$.
   g) Se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$.
   h) Se podemos efetuar o produto $A \cdot A$, então **A** é uma matriz quadrada.

7. Se $A^2 = A \cdot A$, então $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 =$ __________.

8. Se **A** é uma matriz triangular superior, então A^2 é __________.

9. Ache x, y, z, w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
    mostre que $AB = AC$.

11. Suponha que $A \neq 0$ e $AB = AC$ onde **A**, **B**, **C** são matrizes tais que a multiplicação esteja definida.
    a) $B = C$?
    b) Se existir uma matriz **Y**, tal que $YA = I$, onde **I** é a matriz identidade, então $B = C$?

12. Explique por que, em geral, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ e $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

13. Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

a) Mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = 0$, $\mathbf{AC} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{CA} = \mathbf{C}$.

b) Use os resultados de (*a*) para mostrar que $\mathbf{ACB} = \mathbf{CBA}$, $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$.

14. Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, ache $\mathbf{B}$, de modo que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

15. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Moderno} \\ \text{Mediterrâneo} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Ferro} & \text{Madeira} & \text{Vidro} & \text{Tinta} & \text{Tijolo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array}$$

(Qualquer semelhança dos números com a realidade é mera coincidência.)

a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?

c) Qual o custo total do material empregado?

16. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo, significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria o significado da matriz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$?

Seja $\mathbf{A}^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento $c_{42} = \sum_{k=1}^{5} a_{4k}a_{k2} = 0+0+1+0+0 = 1$.

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1$. Isto significa que a estação 4 transmite para a estação 2 através de uma retransmissão pela estação 3, embora não exista uma transmissão direta de 4 para 2.

a) Calcule A^2.
b) Qual o significado de $c_{13} = 2$?
c) Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: "A matriz A^2 representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão".
d) Qual o significado das matrizes $A + A^2$, A^3 e $A + A^2 + A^3$?
e) Se A fosse simétrica, o que significaria?

17. Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: o Jacaré, o Piranha e o Urubu. O termo a_{ij} da matriz A abaixo é a probabilidade de que um dono de carro da linha i mude para o carro da coluna j, quando comprar um carro novo.

$$\begin{array}{cc} & \text{Para} \\ & \begin{array}{ccc} \text{J} & \text{P} & \text{U} \end{array} \\ \text{De} \begin{array}{c} \text{J} \\ \text{P} \\ \text{U} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Os termos da diagonal dão a probabilidade a_{ii} de se comprar um carro novo da mesma marca.

A^2 representa as probabilidades de se mudar de uma marca para outra depois de duas compras. Você pode verificar isto a partir dos conceitos básicos de probabilidade (consulte 1.5) e produto de matrizes.

Calcule A^2 e interprete.

18. Tente descobrir outras situações concretas que possam ser analisadas de modo similar ao de cada um dos problemas 15, 16 e 17.

* 1.5 PROCESSOS ALEATÓRIOS: CADEIAS DE MARKOV

Muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno estudado passasse, a partir de um estado inicial, por uma seqüência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade. (Suporemos nesta secção um conhecimento mínimo sobre probabilidades.) No caso em que esta probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, o processo será chamado *processo de Markov* e uma seqüência de estados seguindo este processo será denominada uma *cadeia de Markov*. Evidentemente, ao se supor tal restrição estaremos simplificando, talvez demasiadamente, uma vez