1. Entre os operadores dos exercícios 2 a 8 da secção 6.3 verifique quais são diagonalizáveis.

2. Dizemos que uma matriz $A_{n \times n}$ é *diagonalizável* se seu operador associado $T_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ for diagonalizável, ou seja, A é diagonalizável se, e somente se A admitir n autovetores LI. Baseado nisto, verifique quais das matrizes dos Exercícios 9 a 18 da secção 6.3 são diagonalizáveis.

3. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) A é diagonalizável (use a definição do exercício anterior).
b) Encontre seu polinômio minimal.

4. Seja A uma matriz 3 × 3 triangular superior, com todos os seus elementos acima da diagonal distintos e não nulos.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

a) Quais são os autovalores e autovetores de A?
b) Qual é o polinômio minimal de A?

5. Para quais valores de a as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[3]Para detalhes consulte Lipschutz, S. *Álgebra Linear*, Mc Graw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971; ou Hoffman, K. e Kunze, R. *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971; ou Gelfond, I. M.; *Lectures in Linear Álgebra*; Interscience Publishers, New York, 1961.

6. Sejam $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ linear, $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, a base canônica de $\mathbf{R}^3$, $\beta = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

b) Ache $[T]_{\beta}^{\beta}$ e o polinômio característico. Que observação você faz a este respeito?

c) Encontre uma base γ de $\mathbf{R}^3$, se for possível, tal que $[T]_{\gamma}^{\gamma}$ seja diagonal.

7. *a*) Sejam $T: V \to V$ um operador linear (V de dimensão finita) e α e β bases distintas de T. Mostre que

$$\det [T]_{\alpha}^{\alpha} = \det [T]_{\beta}^{\beta}$$

(Sugestão: veja a relação entre $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ e $[T]_{\beta}^{\beta}$ no Capítulo 6).

b) Se $\mathbf{A}_{n \times m}$ é diagonalizável, mostre que o determinante de $\mathbf{A}$ é o produto de seus autovalores.
(Sugestão: considere $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, observando que a matriz de $T_{\mathbf{A}}$ na base canônica é exatamente $\mathbf{A}$. Use então o resultado do item (*a*) considerando como α a base canônica e β a base de autovetores.

8. Mostre que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

9. *a*) Mostre que um operador linear T (num espaço de dimensão finita) que comuta com qualquer operador linear diagonalizável é diagonalizável.
b) Nas condições do item (*a*) mostre que na verdade T é um múltiplo escalar do operador identidade, isto é, existe um número r tal que $T = r \cdot I$.

10. Diz-se que um operador linear $T: V \to V$ é *nilpotente* se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0$ (isto é, $T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T(\mathrm{v}) = \mathbf{0}$) para todo $\mathrm{v} \in V$).
a) Seja T nilpotente. Encontre seus autovalores.
b) Encontre uma matriz $\mathbf{A}_{2 \times 2} \neq 0$ tal que $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ seja nilpotente.
c) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

11. Diz-se que um operador linear $T: V \to V$ é *idempotente* se $T^2 = T$ (isto é, se $T \circ T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$).
   a) Seja T idempotente. Ache seus autovalores.
   b) Encontre uma matriz $\mathbf{A}_{2 \times 2} \neq \mathbf{0}$ tal que $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ seja idempotente.
   c) Mostre que um operador linear idempotente é diagonalizável.

*12. Mostre que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável. No entanto, se $\mathbf{A}$ representar, numa certa base, um operador linear $T: V \to V$, onde V é um *espaço vetorial complexo*, então T é diagonalizável. Verifique este fato ou, equivalentemente, que existe uma matriz com elementos complexos $\mathbf{P}_{3 \times 3}$, inversível, tal que

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

*13. Problema-pesquisa:
Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M & a & a & \cdots & a & a \\ a & M & a & \cdots & a & a \\ a & a & M & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & M & a \\ a & a & a & \cdots & a & M \end{bmatrix}_{n \times n}$$

onde M e $a \neq 0$ são números reais. Mostre que
   a) Os autovalores de $\mathbf{A}$ são
   $\lambda = M - a$ com multiplicidade $n - 1$
   e $u = M + (n - 1)a$
   b) $\det \mathbf{A} = (M - a)^{n-1} \cdot [M + (n - 1)a]$

(Este é um caso particular da situação estudada no artigo "sobre uma classe de matrizes cujo problema de autovalores é facilmente solucionável" de Odelar Leite Linhares, publicado na revista Ciência e Cultura (SBPC) volume 29, número 8, de agosto de 1.977.)

14. Utilize a forma diagonal para encontrar $\mathbf{A}^n$ nos seguintes casos (n natural):

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Você pode generalizar o seu procedimento para o caso de uma matriz quadrada qualquer? Quais são as condições?