UFJF - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo II - Superfícies no Espaço

Prof. Wilhelm Passarella Freire

Prof. Grigori Chapiro

Conteúdo

1 Introdução

Definição 1 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamado superfície se existe um subconjunto $R \subset \mathbb{R}^2$ e uma função injetora $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(R) = S$. A função f junto com a região R é chamada de parametrização de S.*

Definição 2 *Considere três retas duas a duas ortogonais Ox, Oy e Oz satisfazendo a regra da mão direita. O* **sistema de coordenada cartesiano** *associa cada ponto no espaço $\mathbb{R}^3$ a três números reais (x, y, z) correspondendo respectivamente a projeções deste ponto nas retas Ox, Oy e Oz (chamadas de* **eixos***).*

OBS.: Esta associação é única para cada ponto do espaço.

Definição 3 *Dado o sistema de coordenadas cartesiano, um ponto P do espaço $\mathbb{R}^3$ e P' a projeção de P no plano xy. O* **sistema de coordenadas cilíndricas** *associa P a três números reais (r, θ, z) correspondendo respectivamente ao tamanho do segmento OP', ao ângulo que o segmento OP' faz com a semi-reta positiva de Ox e a projeção de P no eixo Oz.*

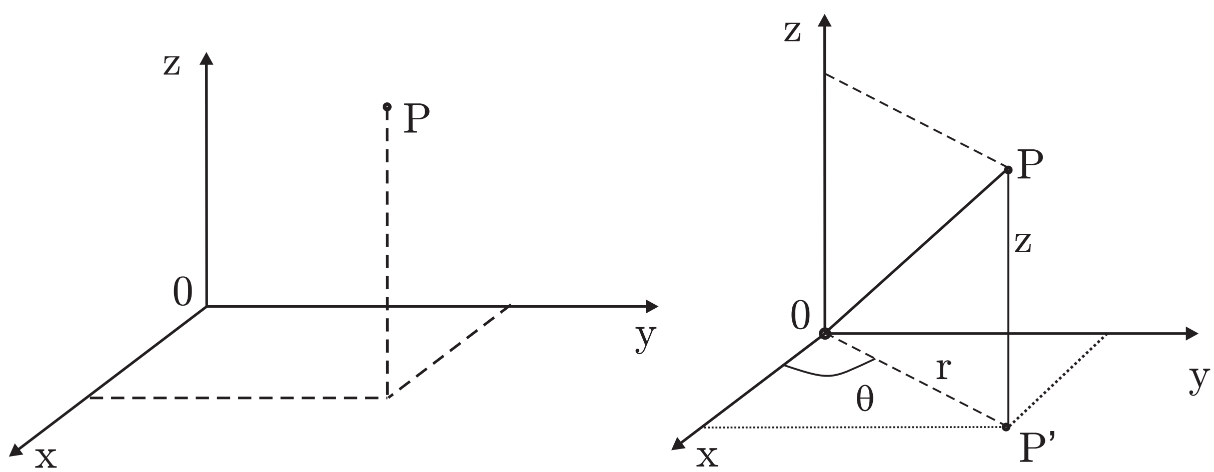
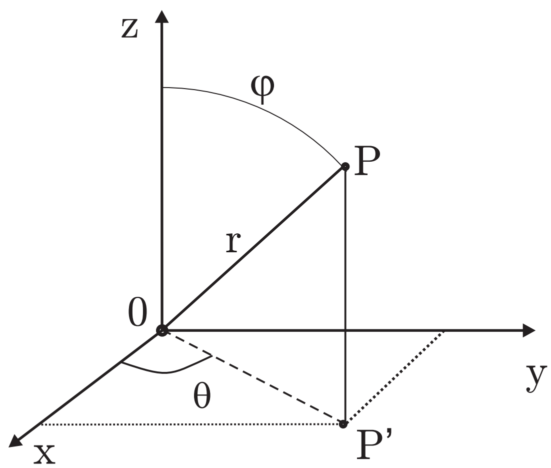


Figura 1: Esquema de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

OBS.: Coordenadas cilíndricas são coordenadas polares no plano xy junto com a altura z do ponto. Analogamente com as coordenadas polares a representação da origem nas coordenadas cilíndricas não é única.

Definição 4 *Dado o sistema de coordenadas cartesiano, um ponto P do espaço $\mathbb{R}^3$ e P' a projeção de P no plano xy. O* **sistema de coordenadas esféricas** *associa P a três números reais (r, θ, ϕ)*

correspondendo respectivamente ao tamanho do segmento OP, ao ângulo que o segmento OP' faz com a semi-reta positiva de Ox e ao ângulo que o segmento OP faz com a semi-reta positiva de Oz.



$P = (x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica E

$P' = (x, y, 0)$ a projeção de P no plano-xy

$\theta =$ ângulo que OP' faz com o sentido positivo do eixo-x

$\varphi =$ ângulo que OP faz com o sentido positivo do eixo-z

Então
$$z = R\cos\varphi$$
$$OP' = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$x = OP'\cos\theta \quad\longrightarrow\quad x = R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$y = OP'\,\mathrm{sen}\,\theta \quad\longrightarrow\quad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$.

OBS.: Analogamente com as coordenadas cilíndricas a representação da origem nas coordenadas esféricas não é única.

Nem toda superfície pode ser definida através de uma equação. (Ex.: fractais). Classificamos as superfícies descritass por uma equação em:

Definição 5 *Dado um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$. Uma superfície esta definida na* **forma explícita** *quando a equação que a descreve tem uma das coordenadas em função das outras.*

Definição 6 *Dado um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$. Uma superfície esta definida na* **forma**

implícita *quando a equação que a descreve tem a forma* $f(a,b,c) = 0$*, onde* a*,* b *e* c *são as coordenadas.*

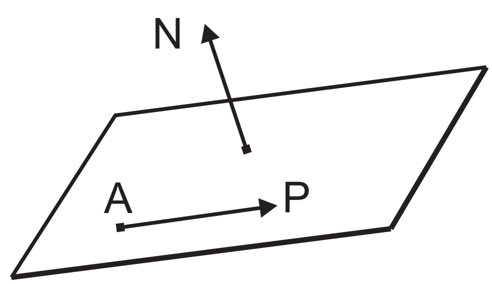
Exemplo 1 *As superfícies* $z = x^2 + y^2$*,* $x = sen(z - y)$ *são dadas na forma explícita. As superfícies* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$*,* $\exp(xyz) = 5$ *na forma implícita.*

Definição 7 *Seja* S *uma superfície em* $\mathbb{R}^3$ *representada pela equação* $F(x,y,z) = 0$ *nas coordenadas cartesianas* (x,y,z)*.*
(1) O traço de S *no plano-xy é o conjunto de pontos que satisfazem a equação* $f(x,y) = F(x,y,0) = 0$
(2) O traço de S *no plano-xz é o conjunto de pontos que satisfazem a equação* $f(x,z) = F(x,0,z) = 0$
(3) O traço de S *no plano-yz é o conjunto de pontos que satisfazem a equação* $f(y,z) = F(0,y,z) = 0$
(4) O traço de S *no plano* $z = k$ *é o conjunto de pontos que satisfazem* $f(x,y) = F(x,y,k) = 0$
(5) O traço de S *no plano* $y = k$ *é o conjunto de pontos que satisfazem* $f(x,z) = F(x,k,z) = 0$
(6) O traço de S *no plano* $x = k$ *é o conjunto de pontos que satisfazem* $f(y,z) = F(k,y,z) = 0$
Os traços são as intersecções de uma superfície com planos paralelos aos planos coordenados e serão de extrema utilidade no esboço da superfície.

2 Plano

Definição 8 *É a superfície cuja equação cartesiana pode ser colocada na forma* $\boxed{ax + by + cz = d}$.

Seja S o plano que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e tem $N = (a,b,c)$ como vetor normal.



Seja $P = (x,y,z)$ o ponto genérico do plano S. O vetor AP é paralelo a S e, portanto, a equação cartesiana de S é dada por

$$\boxed{N \cdot AP = 0}$$

ou

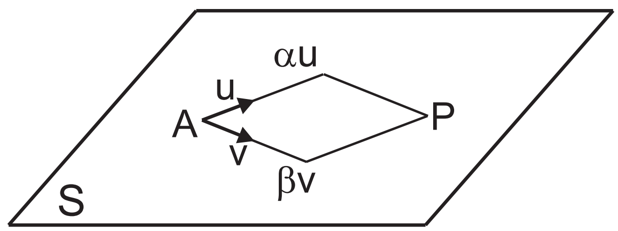
$$(a,b,c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ou

$$\boxed{ax+by+cz=d} \quad \text{onde} \quad d=ax_0+by_0+cz_0.$$

2.1 Parametrização do plano

Consideremos u e v vetores paralelos ao plano S tais que um vetor não é múltiplo do outro. Sejam $A \in S$ e P o ponto genérico de S.

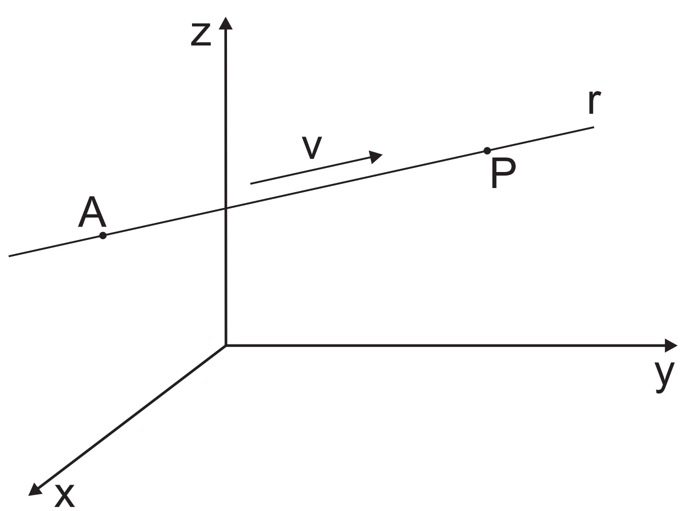


Escolhendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ convenientemente podemos escrever

$$P = A + \alpha u + \beta v.$$

Pondo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\alpha,\beta) = A + \alpha u + \beta v$, temos que $f(\mathbb{R}^2) = S$ e, portanto, f é uma parametrização de S.

OBS.:



$A = (x_0, y_0, z_0)$: ponto da reta r

$P = (x, y, z)$: ponto genérico de r

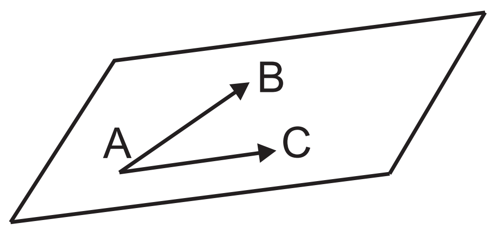
$v = (a, b, c)$: vetor diretor de r

Equação vetorial de r : $\qquad P = A + tv \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

Equações paramétricas de r :

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Exemplo 2 *Escreva as equações vetorial, paramétricas e cartesiana do plano que passa pelos pontos* $A = (1, 0, 1)$*,* $B = (2, 1, -1)$ *e* $C = (1, -1, 0)$*.*



Exemplo 3 *Obtenha a interseção da reta* r *com o plano* π

(a) $\quad r : P = (1, 0, 1) + t(2, 1, 3) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

$\pi : x + y + z = 20$

(b) $\quad r : P = (0, 1, 1) + t(2, 1, -3) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

$\pi : P = (1, 0, 0) + \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1)$

3 Quádricas

Definição 9 *Quádricas são as superfícies cuja equação cartesiana tem a forma geral:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

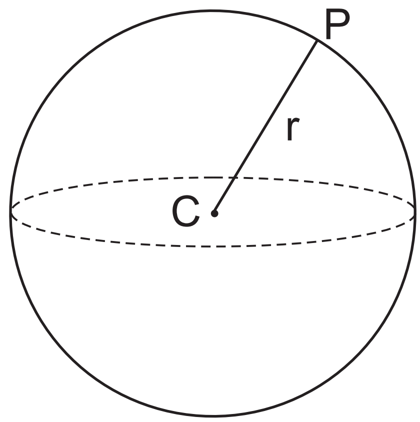
em que $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J \in \mathbb{R}$ *com* A, B, C, D, E, F *não simultaneamente nulos.*

Através de rotação e/ou translação de eixos é possível escrever a equação de uma quádrica em uma forma padrão, possibilitando sua identificação.

Em um primeiro momento, apresentaremos as quádricas na forma padrão e aprenderemos a reconhecê-las. Depois, estudaremos como transformar a equação geral em uma das formas padrão.

4 Esfera

Definição 10 *Uma esfera é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cuja distância a um ponto fixo chamado centro é igual a uma constante positiva chamada raio.*



Equação Cartesiana : Sejam $C = (x_0, y_0, z_0)$ o centro e R o raio de uma esfera E.
Seja $P = (x, y, z)$ o ponto genérico de E, então:
$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R \quad \Longrightarrow \quad \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}$
é a equação cartesiana da esfera de centro em (x_0, y_0, z_0) e raio R.
Acabamos de provar que uma definição equivalente para a esfera seria:

Definição 11 *Esfera é a superfície quádrica cuja equação cartesiana pode ser colocada na forma*

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}$$

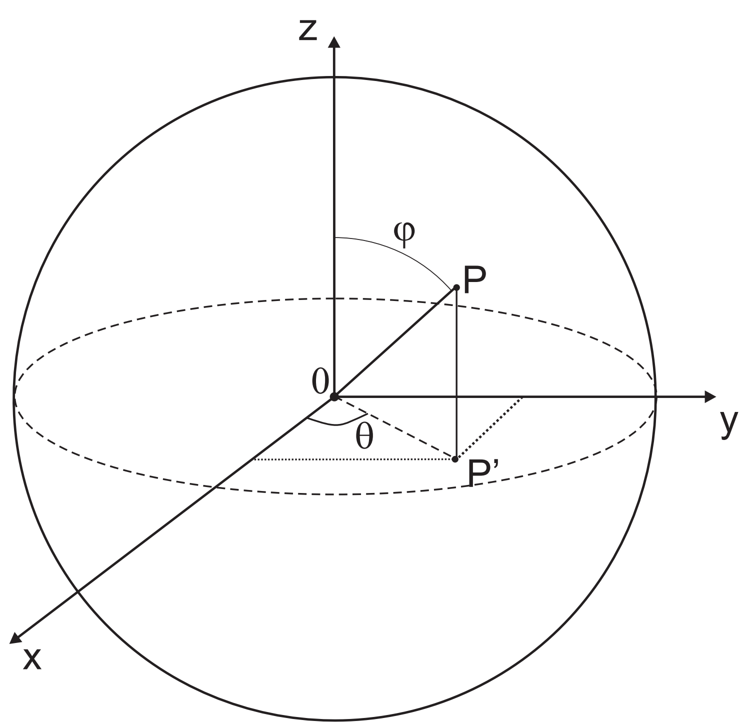
com $R \in \mathbb{R}_+^*$ - raio da esfera.

4.1 Parametrização da esfera

Consideremos uma esfera E com centro na origem e raio R. Usaremos coordenadas esféricas para parametrizar a esfera:

$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(\theta, \varphi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi)$



Se a esfera E tem centro no ponto (x_0, y_0, z_0), após uma translação de eixos, escrevemos

$x - x_0 = R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$

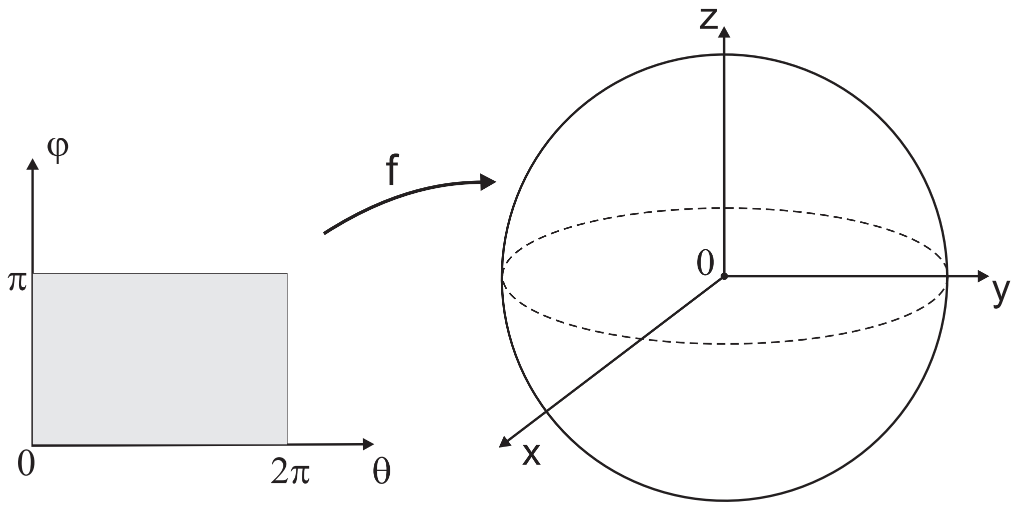
$y - y_0 = R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$

$z - z_0 = R\cos\varphi$

A parametrização fica então:

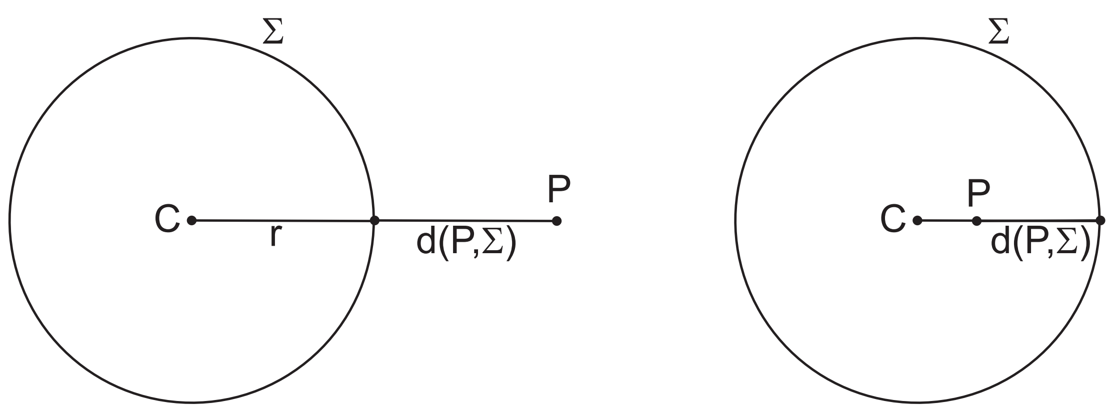
$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(\theta, \varphi) = (x_0 + R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, y_0 + R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, z_0 + R\cos\varphi)$$



Exemplo 4 *Calcule a distância do ponto $P = (1, -1, 3)$ à superfície esférica*

$$E : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0.$$



5 Elipsóide

Definição 12 *É a superfície quádrica cuja equação cartesiana pode ser colocada na forma*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$

Traços

plano-xy : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipse

plano-xz : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ elipse

plano-yz : $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ elipse

plano $z = k$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2(1-\frac{k^2}{c^2})} + \dfrac{y^2}{b^2(1-\frac{k^2}{c^2})} = 1$

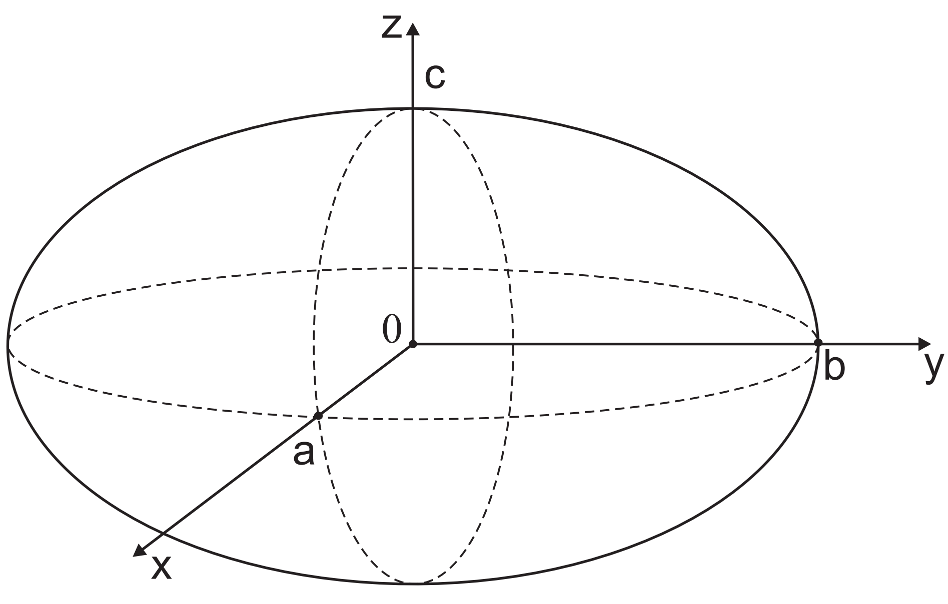
elipses para $|k| < c$

ponto $(0, 0, c)$ para $k = c$

ponto $(0, 0, -c)$ para $k = -c$

$\emptyset$ para $|k| > c$

OBS.: O traço do elipsóide no plano $z = k$ significa que a superfície é formado por uma única peça.



5.1 Parametrização do Elipsóide

Sejam

$P = (x, y, z)$ um ponto genérico do elipsóide

$P' = (x, y, 0)$ a projeção de P no plano-xy

$\theta =$ ângulo que OP' faz com o sentido positivo do eixo-x

$\varphi =$ ângulo que OP faz com o sentido positivo do eixo-z

Pondo

$x = a\cos\theta \operatorname{sen}\varphi$

$y = b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$

$z = c\cos\varphi \qquad$ com $\quad \theta \in [0, 2\pi] \;$ e $\; \varphi \in [0, \pi]$,

obtemos a seguinte parametrização para o elipsóide:

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(\theta, \varphi) = (a\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, b\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, c\cos\varphi)$$

6 Hiperbolóide

Definição 13 *Hiperbolóide de uma folha é a superfície quádrica cuja equação cartesiana pode ser escrita em uma das formas*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad ou \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad ou \quad \boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}^*_+$.

Traços

Consideremos o hiperboloide de uma folha $\mathcal{H}1$ de equação $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

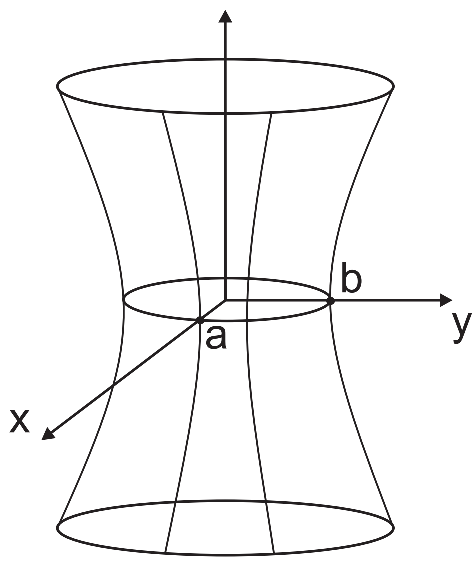
plano-xy : $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad$ elipse

plano-xz : $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad$ hipérbole

plano-yz : $\quad \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad$ hipérbole

plano $z = k$: $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} \quad$ elipse plano $y = k$: $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \quad$ hipérbole

plano $x = k$: $\quad \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \quad$ hipérbole



OBS. 1: O traço $z = k$ mostra que é peça única.

OBS. 2: O eixo de simetria corresponde ao eixo da variável que aparece na equação precedida do sinal negativo (-).

6.1 Parametrização do Hiperbolóide de uma Folha

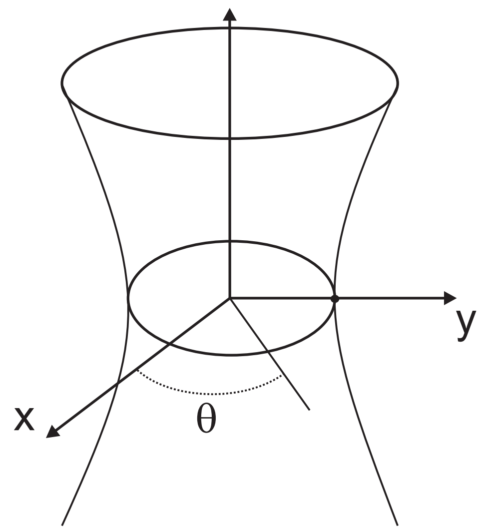
Seja

$P = (b \operatorname{ch} t, c \operatorname{sh} t)$, $t \in \mathbb{R}$, um ponto do ramo direito da hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

A seção transversal do hiperbolóide que passa por P, obtida fazendo-se $z = k$, para algum k, é uma elipse cujo semi-eixo paralelo ao eixo-x é $a \operatorname{ch} t$ e cujo semi-eixo paralelo ao eixo-y é $b \operatorname{ch} t$

Portanto, essa elipse pode ser parametrizada tomando-se :

$x = a \operatorname{ch} t \cos\theta \quad$ e $\quad y = b \operatorname{ch} t \operatorname{sen}\theta \quad$ com $\quad \theta \in [0, 2\pi]$



Daí, obtemos a seguinte parametrização para o hiperbolóide $\mathcal{H}1$:

$$f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(\theta, t) = (a \cos\theta \operatorname{ch} t, b \operatorname{sen}\theta \operatorname{ch} t, c \operatorname{sh} t).$$

Definição 14 *Hiperbolóide de duas folhas é a superfície quádrica cuja equação cartesiana pode ser escrita em uma das formas:*

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad ou \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad ou \quad \boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Traços

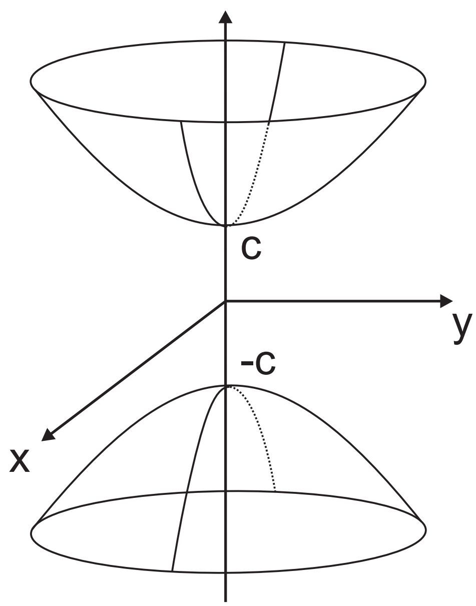
Consideremos o hiperbolóide de duas folhas $\mathcal{H}2$ de equação $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

plano-xy :	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\emptyset$
plano-xz :	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	hipérbole
plano-yz :	$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	hipérbole
plano $z = k$:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$	elipse se $\lvert k\rvert > c$, $\emptyset$ se $\lvert k\rvert < c$

plano $y = k$: $\qquad -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \qquad$ hipérbole

plano $x = k$: $\qquad -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2} \qquad$ hipérbole

OBS: Plano $z = k$ mostra que são dois pedaços.



Observe que o eixo de simetria corresponde ao eixo da variável que aparece na equação precedida do sinal positivo (+).

6.2 Parametrização do Hiperbolóide de duas Folhas

Seja $P = (b \operatorname{sh} t, c \operatorname{ch} t)$, $t \in \mathbb{R}$, um ponto do ramo superior da hipérbole

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

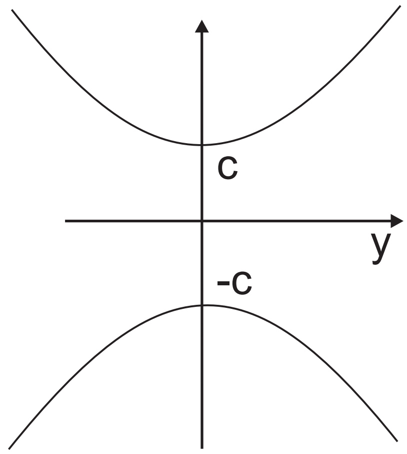
A seção transversal do hiperbolóide que passa por P, obtida fazendo-se $z = k$, para algum k, é uma elipse cujo semi-eixo paralelo ao eixo-x é $a \operatorname{sh} t$ e cujo semi-eixo paralelo ao eixo-y é $b \operatorname{sh} t$.

Portanto, essa elipse pode ser parametrizada tomando-se:

$x = a \operatorname{sh} t \cos\theta \quad$ e $\quad y = b \operatorname{sh} t \operatorname{sen}\theta \quad$ com $\quad \theta \in [0, 2\pi]$

Daí, obtemos a seguinte parametrização para a parte superior do hiperboloide $\mathcal{H}2$:

$$f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(\theta, t) = (a \cos\theta \operatorname{sh} t, b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sh} t, c \operatorname{ch} t)$$



Considerando, agora $P = (b \operatorname{sh} t, -c \operatorname{ch} t)$, $t \in \mathbb{R}$, um ponto do ramo inferior da hipérbole

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

obtemos, de modo análogo, a seguinte parametrização para a parte inferior do hiperboloide $\mathcal{H}2$:

$$f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(\theta, t) = (a \cos\theta \operatorname{sh} t, b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sh} t, -c \operatorname{ch} t)$$

7 Parabolóide

Definição 15 *Parabolóide elíptico é a superfície quádrica cuja equação cartesiana pode ser escrita em uma das formas*

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad ou \quad \boxed{y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad ou \quad \boxed{x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Traços

Consideremos o parabolóide elíptico $\mathcal{PE}$ de equação $\quad z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

plano-xy :	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	ponto $(0, 0, 0)$
plano-xz :	$z = \dfrac{x^2}{a^2}$	parábola
plano-yz :	$z = \dfrac{y^2}{b^2}$	parábola

plano $z = k$: $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k \quad$ elipse se $a \neq b$ e $k > 0$

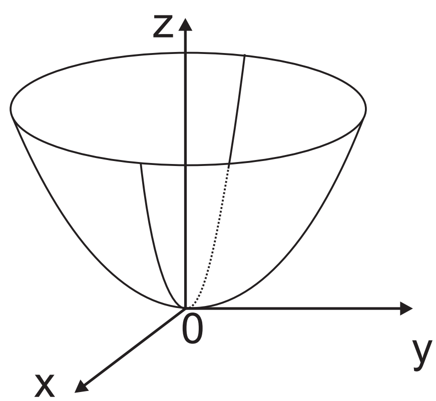
circunferência se $a = b$ e $k > 0$

$\emptyset$ de $k < 0$

plano $y = k$: $\quad z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} \quad$ parábola

plano $x = k$: $\quad z = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{k^2}{a^2} \quad$ parábola

OBS: Plano $z = k$.



7.1 Parametrização do paraboloide elíptico

Consideremos a elipse de equação $\dfrac{x^2}{(ta)^2} + \dfrac{y^2}{(tb)^2} = 1$ obtida pela interseção do paraboloide $\mathcal{PE}$ com o plano $z = t^2$

Uma parametrização para essa elipse é :

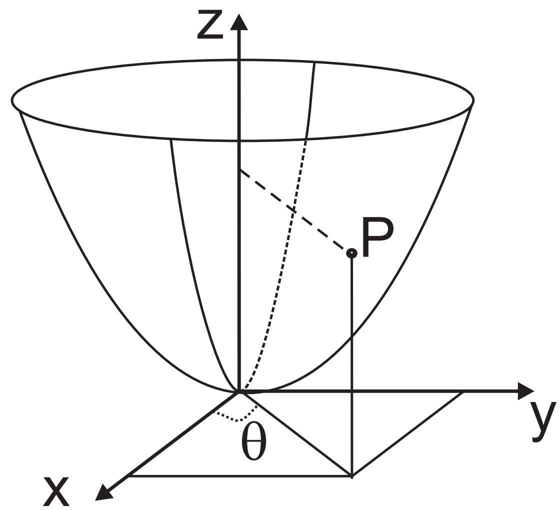
$x = a\,t\cos\theta \quad$ e $\quad y = b\,t\,\mathrm{sen}\,\theta \quad$ com $\quad \theta \in [0, 2\pi]$

Portanto, uma parametrização para o paraboloide elíptico é:

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$f(\theta, t) = (a\,t\cos\theta, b\,t\,\mathrm{sen}\,\theta, t^2).$$

OBS.: Quando uma superfície S é o gráfico de uma função $g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $z = g(x, y)$, uma parametrização natural para S é:

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y) = (x, y, g(x, y)).$$



Outra possibilidade para parametrizar o paraboloide elíptico é considerar a parametrização natural:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y) = (x, y, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}).$$

Definição 16 *Parabolóide hiperbólico é a superfície quádrica cuja equação cartesiana pode ser escrita em uma das formas*

$$\boxed{z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad ou \quad \boxed{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$
$$\boxed{y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad ou \quad \boxed{y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$
$$\boxed{x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad ou \quad \boxed{x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Traços

Consideremos o paraboloide hiperbólico $\mathcal{P}\ \mathcal{H}$ de equação $\quad z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

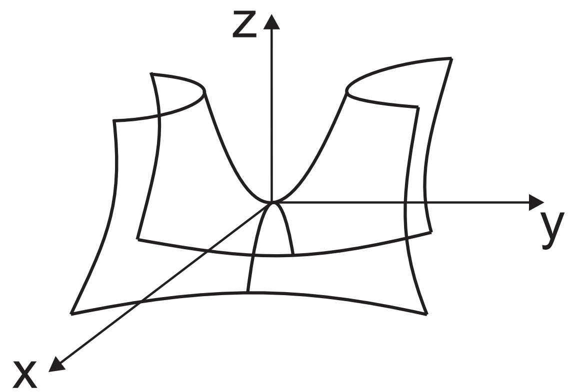
plano-xy : $\quad y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\dfrac{b}{a}x \qquad$ par de retas

plano-xz : $\quad z = -\dfrac{x^2}{a^2} \qquad$ parábola

plano-yz : $\quad z = \dfrac{y^2}{b^2} \qquad$ parábola plano $z = k$: $\quad \dfrac{y^2}{kb^2} - \dfrac{x^2}{ka^2} = 1 \quad$ hipérbole

plano $y = k$: $\quad z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} \quad$ parábola

plano $x = k$: $\quad z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{k^2}{a^2} \quad$ parábola



7.2 Parametrização do Paraboloide Hiperbólico

No caso do paraboloide hiperbólico adotaremos a parametrização natural:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y) = (x, y, -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}).$$

8 Cilindro quádrico

Definição 17 *Cilindro quádrico é a superfície quádrica cuja equação cartesiana tem uma das seguintes formas*

$$\boxed{F(x,y) = 0} \quad ou \quad \boxed{G(x,z) = 0} \quad ou \quad \boxed{H(y,z) = 0}$$

em que as equações $F(x, y) = 0$, $G(x, z) = 0$ e $H(y, z) = 0$ representam cônicas no respectivo plano coordenado.

Consideremos o cilindro quádrico de equação $F(x, y)$. A interseção do plano $z = k$ com o esse cilindro é a cônica que originou o cilindro, chamada DIRETRIZ do cilindro.

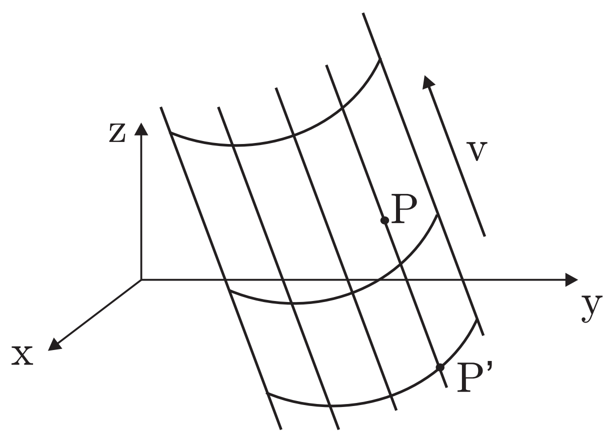
8.1 Parametrização do Cilindro Quádrico

Seja $F(x,y) = 0$ a equação da diretriz que tem as equações paramétricas dadas por $x = g(\lambda)$ e $y = h(\lambda)$ com $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$. Então, uma parametrização para o cilindro quádrico é:

$$f : \Lambda \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$f(\lambda, t) = (g(\lambda), h(\lambda), t).$$

9 Superfície cilíndrica

Definição 18 *Superfície cilíndrica é a superfície que é obtida movendo-se paralelamente uma reta chamada GERATRIZ sobre uma curva chamada DIRETRIZ.*



Equação Cartesiana da superfície Cilíndrica

Suponhamos que a diretriz de uma superfície cilíndrica S esteja no plano-xy e tenha equação

$$F(x,y) = 0$$

Suponhamos que as geratrizes sejam paralelas ao vetor $v = (a,b,c)$ com $c \neq 0$

Sejam $P = (x,y,z) \in S$ e $P' = (x',y',0)$ um ponto do plano-xy que pertence à geratriz que passa por P

Então, $P \in S$ se e somente se $P'P = \alpha v$ e $F(x',y') = 0$

Mas, $P'P = \alpha v$ equivale a $(x-x', y-y', z) = \alpha(a,b,c)$, o que implica em

$$x - x' = \alpha a \quad , \quad y - y' = \alpha b \quad , \quad z = \alpha c$$

Daí, podemos concluir

$$x' = x - \frac{a}{c} z \quad \text{e} \quad y' = y - \frac{b}{c} z$$

Portanto, a equação de cartesiana de S se escreve como

$$\boxed{F(x - \frac{a}{c}\,z\,,\,y - \frac{b}{c}\,z) = 0}$$

De maneira análoga, se a diretriz da superfície cilíndrica S está no plano-xz, tem equação $G(x, z) = 0$ e as geratrizes são paralelas ao vetor $v = (a, b, c)$ com $b \neq 0$, a equação cartesiana de $\mathcal{S}$ fica

$$\boxed{G(x - \frac{a}{b}\,y\,,\,z - \frac{c}{b}\,y) = 0}$$

Finalmente, se a diretriz da superfície cilíndrica S está no plano-yz, tem equação $H(y, z) = 0$ e as geratrizes são paralelas ao vetor $v = (a, b, c)$ com $a \neq 0$, a equação cartesiana de $\mathcal{S}$ fica

$$\boxed{H(y - \frac{b}{a}\,x\,,\,z - \frac{c}{a}\,x) = 0}$$

Portanto, uma equação a três variáveis $w(x, y, z) = 0$ representa uma superfície cilíndrica se puder ser colocada em uma das formas acima.

Obs

Uma equação a duas variáveis representa uma superfície cilíndrica cuja diretriz é a curva no plano das varáveis presentes na equação e cujas geratrizes são retas paralelas ao eixo da variável ausente na equação.

9.1 Parametrização de uma superfície Cilíndrica

Consideremos uma superfície cilíndrica S de diretriz $F(x, y) = 0$ e geratrizes paralelas ao vetor $v = (a, b, c)$, onde $c \neq 0$.

Seja $P = (x, y, z) \in S$ e $P' = (x', y', 0)$ o ponto da diretriz que pertence à geratriz que passa por P.

Sejam $x' = g(t)$ e $y' = h(t)$ as equações paramétricas da diretriz, onde $t \in I$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo

Então, $P'P = \lambda v$ ou $(x - x', y - y', z) = \lambda(a, b, c) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x = x' + \lambda a = g(t) + \lambda a \\ y = y' + \lambda b = h(t) + \lambda b \\ z = \lambda c \end{cases}$$

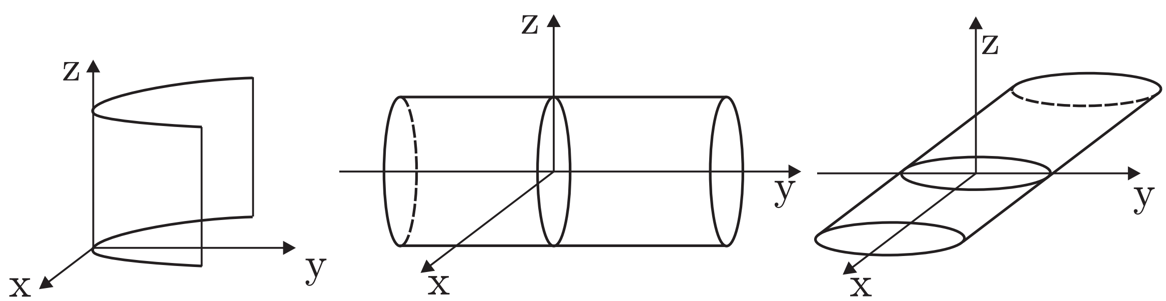
onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $t \in I \in \mathbb{R}$

Portanto, uma parametrização para S é

$$f : \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(\lambda, t) = (g(t) + \lambda a, h(t) + \lambda b, \lambda c)$$

Exemplo 5 *Identifique e esboce as superfícies cilíndricas de equação :*

(a) $y = x^2$ *(b)*$x^2 + z^2 = 1$ *(c)* $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $b \neq c$ *(d)* $2x + y = 2$



Exemplo 6 *Encontre a equação da superfície cilíndrica S de diretriz $x^2 - 4y = 0$ e geratrizes paralelas ao vetor $v = (1, -2, 3)$.*

Exemplo 7 *Identifique a diretriz e as geratrizes da superfície cilíndrica S de equação $-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$.*

Exemplo 8 *Escreva uma parametrização para a superfície cilíndrica S de diretriz $x^2 + y^2 = 4$ e geratrizes paralelas ao eixo-z.*

Exemplo 9 *Escreva uma parametrização para a superfície cilíndrica S do exemplo 3.*

10 Cone elíptico

Definição 19 *Cone elíptico é a superfície quádrica cuja equação cartesiana pode ser colocada na forma*

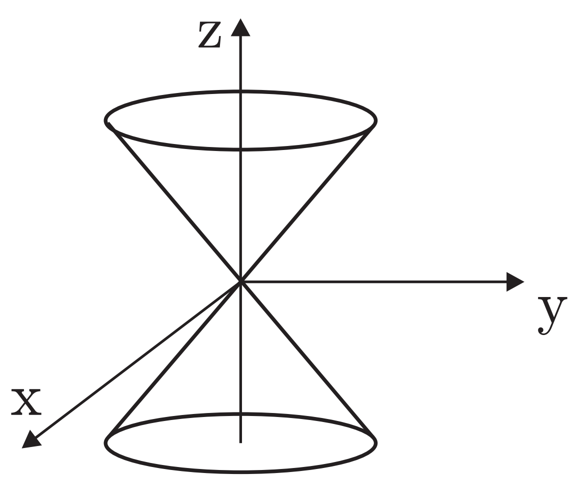
$$\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

OBS.: Quando $a = b$ o cone é chamado circular.

Traços

plano-xy :	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	ponto $(0,0,0)$
plano-xz :	$z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad z = \pm\dfrac{1}{a}\, x$	par de retas
plano-yz :	$z^2 = \dfrac{y^2}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad z = \pm\dfrac{1}{b}\, y$	par de retas
plano $z = k$:	$\dfrac{x^2}{(ka)^2} + \dfrac{y^2}{(kb)^2} = 1$	elipse
plano $y = k$:	$\dfrac{z^2}{(k/b)^2} - \dfrac{x^2}{(ka/b)^2} = 1$	hipérbole
plano $x = k$:	$\dfrac{z^2}{(k/a)^2} - \dfrac{y^2}{(kb/a)^2} = 1$	hipérbole



10.1 Parametrização do Cone Elíptico

Consideremos a elipse de equação $\dfrac{x^2}{(ta)^2} + \dfrac{y^2}{(tb)^2} = 1$ obtida pela interseção do cone com o plano $z = t$
Uma possível parametrização para essa elipse é:

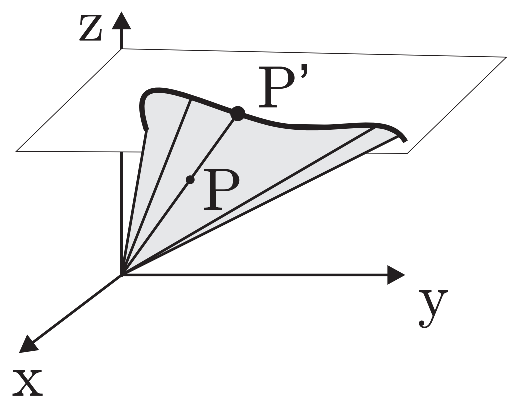
$$x = a\,t\cos\theta, \quad y = b\,t\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Portanto, uma parametrização para o cone elíptico é:

$$f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$f(\theta, t) = (a\, t \cos\theta, b\, t \operatorname{sen}\theta, t).$$

11 Superfície cônica

Definição 20 *Superfície cônica é a superfície que se obtem movendo-se uma reta que passa por um ponto fixo chamado VÉRTICE sobre uma curva chamada DIRETRIZ.*



Equação Cartesiana da superfície Cônica

Seja S um superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ e cuja diretriz tenha equação:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = c \end{cases}$$

Seja $P = (x, y, z) \in S$ e $P' = (x', y', c)$ o ponto da diretriz situado na reta que passa pela origem e pelo ponto P.

Então, $OP = \lambda OP'$ ou, equivalentemente, $(x, y, z) = \lambda(x', y', c)$

Da última igualdade obtemos

$x = \lambda x' \quad , \quad y = \lambda y' \quad , \quad z = \lambda c$

Daí

$x' = c\,\dfrac{x}{z} \quad \text{e} \quad y' = c\,\dfrac{y}{z}$

Portanto, a equação de cartesiana de S se escreve como:

$$\boxed{F(c\,\frac{x}{z}\,,\, c\,\frac{y}{z}) = 0}$$

Suponhamos agora que a superfície cônica S tenha vértice na origem $O = (0,0,0)$ e sua diretriz tenha equação:

$$\begin{cases} G(x,z) = 0 \\ y = b \end{cases}$$

Procedendo como acima, obtemos a seguinte equação para S

$$\boxed{G(b\,\frac{x}{y}\,,\, b\,\frac{z}{y}) = 0}$$

Finalmente, se a superfície cônica S tem vértice na origem $O = (0,0,0)$ e sua diretriz tem por equação:

$$\begin{cases} H(y,z) = 0 \\ x = a \end{cases}$$

então, sua equação é dada por

$$\boxed{H(a\,\frac{y}{x}\,,\, a\,\frac{z}{x}) = 0}$$

Propriedade

Uma equação $w(x,y,z) = 0$ representa uma superfície cônica S com vértice na origem se

$$P = (x,y,z) \in S \Longrightarrow P' = \lambda P = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos agora que o vértice de uma superfície cônica S esteja no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que a diretriz de S tenha a equação

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ z = c \end{cases}$$

Então

$$P_0P = \lambda\, P_0P' \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = \lambda\,(x' - x_0) & (1) \\ y - y_0 = \lambda\,(y' - y_0) & (2) \\ z - z_0 = \lambda\,(z' - z_0) & (3) \end{cases}$$

(3) ... $\lambda = \dfrac{z - z_0}{c - z_0}$

(1) ... $\lambda\, x' = \lambda\, x_0 + (x - x_0)$

$$x' = x_0 + \frac{1}{\lambda}(x - x_0) \quad \Longrightarrow \quad x' = x_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(x - x_0)$$

(2) ... $y' = y_0 + \dfrac{c - z_0}{z - z_0}(y - y_0)$

E, neste caso, a equação de S fica

$$\boxed{F(x_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}\,(x - x_0)\,,\; y_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(y - y_0)) = 0.}$$

11.1 Parametrização de uma Superfície Cônica

Seja S um superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ e cuja diretriz tenha equação:

$$\begin{cases} F(g(t), h(t)) = 0 \\ z = c \end{cases}$$

com $t \in I$ sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

Seja $P = (x, y, z) \in S$ e $P' = (x', y', c)$ o ponto da diretriz situado na reta que passa pela origem e pelo ponto P, então:

$OP = \lambda OP'$ ou, equivalentemente, $(x, y, z) = \lambda(x', y', c) \quad \Longrightarrow \quad x = \lambda x' \quad , \quad y = \lambda y' \quad , \quad z = \lambda c$

Mas

$x' = g(t)$ e $y' = h(t)$

Portanto, uma parametrização de S é

$$f : \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(\lambda, t) = (\lambda\, g(t), \lambda\, h(t), \lambda c)$$

Exemplo 10 *Encontre a equação da superfície cônica S com vértice na origem e diretriz*

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ z = 1 \end{cases}$$

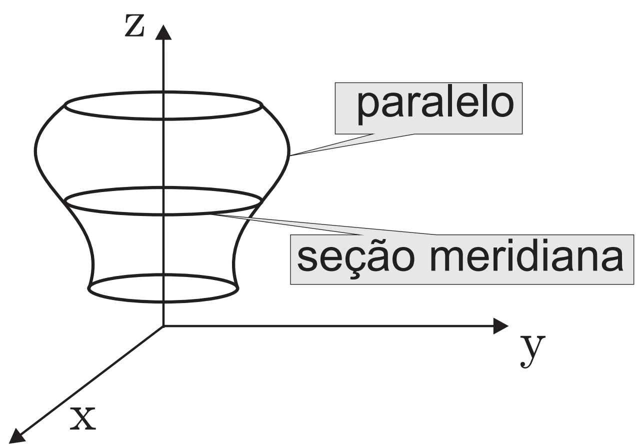
Exemplo 11 *Verifique se $x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$ é uma superfície cônica com vértice na origem.*

Exemplo 12 *Encontre a equação cartesiana e uma parametrização para a superfície cônica S com vértice na origem e diretriz*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

12 Superfícies de revolução

Definição 21 *Superfícies de revolução são superfícies obtidas pela rotação de uma curva plana chamada GERATRIZ em torno de uma reta fixa chamada EIXO situada no mesmo plano da geratriz.*
Cada ponto da geratriz descreve em torno do eixo uma circunferência chamada PARALELO.
Cada posição da geratriz é chamada SECAO MERIDIANA.



12.1 Equação Cartesiana de uma Superfície de Revolução

Suponhamos uma superfície de revolução S com curva geratriz no plano-yz de equação $F(y, z) = 0$ e cujo eixo de revolução é o eixo-z.
O paralelo de altura z é uma circunferência de raio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Como o paralelo intercepta o plano-yz nos pontos $P_1 = (0, r, z)$ e $P_2 = (0, -r, z)$ segue que (r, z) ou $(-r, z)$ satisfaz a equação $F(y, z) = 0$. Portanto, a equação cartesiana de S é dada por :

$$\boxed{F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0}$$

De modo geral, seja S uma superfície de revolução com :

(1) equação da geratriz : $F(x,z)=0$ ou $F(x,y)=0$

eixo de revolução : eixo-x

equação de S : $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

(2) equação da geratriz : $F(y,z)=0$

eixo de revolução : eixo-y

equação de S : $F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

(3) equação da geratriz : $F(x,y)=0$

eixo de revolução : eixo-y

equação de S : $F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

(4) equação da geratriz : $F(x,z)=0$ ou $F(y,z)=0$

eixo de revolução : eixo-z

equação de S : $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

Propriedade

Uma equação $w(x,y,z)=0$ representa uma superfície de revolução em torno de um dos eixos coordenados se as interseções da superfície com os planos perpendiculares ao eixo de revolução são circunferências com centros neste eixo.

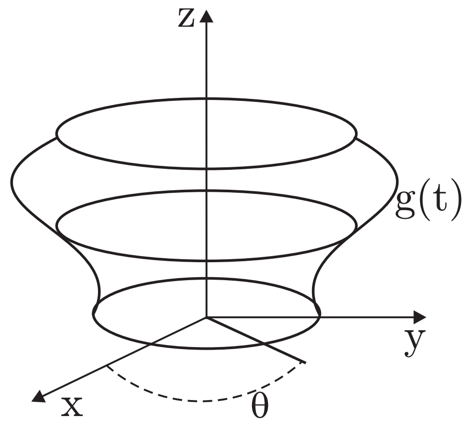
12.2 Parametrização de uma Superfícies de Revolução

Seja S uma superfície de revolução obtida pela rotação da curva C de equação $F(y,z)=0$ em torno do eixo-z.

Sejam $y=g(t)$ e $z=h(t)$, $t\in I$ as equações paramétricas de C, onde $I\subset\mathbb{R}$ é um intervalo

Seja θ o ângulo de rotação em torno do eixo-z

Fazendo $\theta=\pi/2$ temos que $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2}=y=g(t)$



Portanto, uma parametrização de S é:

$$f : I \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(t, \theta) = (g(t)\cos\theta \, , \, g(t)\operatorname{sen}\theta \, , \, h(t))$$

Exemplo 13 *Obtenha a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado. Faça um esboço da superfície.*

(a) elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *em torno do eixo-z.*

(b) hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ *em torno do eixo-y.*

(c) reta $z = x$ *no plano-xz em torno do eixo-z.*

Exemplo 14 *A superfície obtida pela rotação da circunferência* $(y - a)^2 + z^2 = R^2$, $a > R$, *em torno do eixo-z é chamada* **toro**. *Encontre a equação cartesiana e as equações paramétricas do toro.*

13 Identificação de quádricas

Consideremos a equação

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

onde a, b, c, d, e, f, g, h, i, $j \in \mathbb{R}$ com a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos.

Através de uma mudança de coordenadas $X = QX'$

onde $\quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad X'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad$ e $\quad Q=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$

em que u_1, u_2, u_3 são vetores unitários e ortogonais, a equação ($\star$) pode ser rescrita como

$$(\star\star) \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0$$

onde a', b' e c' são as raízes do polinômio em λ:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g' & h' & i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} Q$$

$$j' = j$$

u_1 é uma solução de norma 1 do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a-a' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-a' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

u_2 é uma solução de norma 1 do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a-b' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-b' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e $u_3 = u_1 \times u_2$.

Os vetores u_1, u_2, u_3 são os unitários do novo sistema de eixos que permite escrever a quádrica na forma ($\star\star$).

TEOREMA

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$ com a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos.

Sejam a', b' e c' as raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b - \lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Então

(1) se a', b' e c' tiverem o mesmo sinal, $\mathcal{S}$ é um elipsóide, um ponto ou $\emptyset$.

(2) se a', b' e c' forem não nulos e não tiverem o mesmo sinal, $\mathcal{S}$ é um hiperbolóide ou um cone elíptico.

(3) se apenas um entre a', b' e c' for nulo, $\mathcal{S}$ é um parabolóide, um cilindro elíptico, um cilindro hiperbólico, dois planos concorrentes, uma reta ou $\emptyset$.

(4) se dois entre a', b' e c' forem nulos, $\mathcal{S}$ é um cilindro parabólico, um par de planos paralelos ou um plano.

Referências

[1] Reginaldo J. Santos, *Matrizas vetores e Geometria Analítica*, UFMG, 2008