TERCEIRA LISTA DE CÁLCULO 4.
MATÉRIA: TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROF. GRIGORI CHAPIRO

Esta lista corresponde ao capítulo 6 do livro do W. E. Boyce e R. C. DiPrima (tem na Xerox) e ao capítulo 5 do livro do D. G. Figueredo "Equações Diferenciais Aplicadas". Não é necessário entregar. Quem quiser me mostre ou entregue depois da aula.

Referências

[1] Figueiredo, D.G. e Neves, A.F., *Equações diferenciais aplicadas*, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
[2] Boyce, W.E., DiPrima, R.C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Sexta edição, LTC, São Paulo, 1997.

1. Transformada de Laplace

Exercício 1. Para cada uma das funções a seguir determine se ela é admissível. Caso seja, use a definição para calcular sua transformada de Laplace:

(a) $f(x) = 1$;

(b) $f(x) = K$, onde K constante negativa;

(c) $f(x) = x$;

(d) $f(x) = ch(x)$;

(e) $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo;

(f) $f(x) = sen(bx)$, onde b-constante;

(g) $f(x) = \exp\left(e^{x/2}\right)$;

(h) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3 - x, & 1 < x < 2, \\ 1, & 2 \leq x < \infty; \end{cases}$

(i) $f(x) = x^x$;

(j) $f(x) = \exp(kx)$, onde k - constante;

(k) $f(x) = \exp(x^2 \cos(x))$.

Exercício 2. Para cada uma das funções a seguir determine se ela é admissível. Caso seja, use a definição para calcular sua transformada de Laplace:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ (x-2)^2 & 2 \leq x < \infty; \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ x - \pi & \pi \leq x < 2\pi, \\ 0 & 2\pi \leq x. \end{cases}$

(c) $f(x) = u_1(x) + 2u_3(x) - 6u_4(x)$;

(d) $f(x) = x + 2xu_3(x)$.

Exercício 3. Usando o teorema de convergência das integrais, determine se a integral $\int_0^\infty f(x)dx$ converge ou diverge para $f(x)$ dada a seguir:

(a) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$;

(b) $f(x) = x\exp(-x)$;

(c) $f(x) = x^{-2}\exp(-x)$;

(d) $f(x) = cos(x)\, e^{-x}$.

Exercício 4. Use a definição da transformada de Laplace para obter todas as fórmulas da parte de cima da Tabela 1. (Note que algumas fórmulas você já obteve no Exercício 1.)

Tabela 1. Tabela de transformada de Laplace

$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$	$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$	$\exp(ax)$	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}_+$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$	$sen(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$	$sh(ax)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$ch(ax)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$	$e^{ax}sen(bx)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{ax}cos(bx)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$	$u_c(x)$	$\frac{e^{-cs}}{s},\ s > 0$
$u_c(x)f(x-c)$[1]	$e^{-cs}F(s)$	$e^{cx}f(x)$[1]	$F(s-c)$
$f(cx)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right),\ c > 0$	$\frac{x^{n-1}e^{kx}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-k)^n},\ 1 \le n,\ k < s$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right\}^2 = \mathcal{L}\{f(x)\}\ \mathcal{L}\{g(x)\} = F(s)G(s)$$

2. Resolução de problemas de valor inicial (PVI)

Exercício 5. Usando a Tabela 1, ache a transformada inversa de Laplace das seguintes funções:

[1] Estas relações tem o nome de Teoremas de Deslocamento.

[2] Esta integral tem o nome de integral de convolução das funções f e g.

(a) $F(s) = \dfrac{3}{s^2+4}$;

(b) $F(s) = \dfrac{4}{(s-1)^2}$;

(c) $F(s) = \dfrac{3s}{s^2+4s-1}$;

(d) $F(s) = \dfrac{48s}{2s^2-8s-4}$;

(e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{2s}{(s-1)^2}$;

(f) $F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$;

(g) $F(s) = \dfrac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-5e^{-4s}}{s}$.

Exercício 6. Use a transformada de Laplace para resolver os PVIs a seguir:

(a) $y'' - 5y' + 6y = e^x$, $y(0) = y'(0) = 1$;

(b) $y' + 3y = x\ sen(ax)$, $y(0) = -1$;

(c) $y'' + y = x^2 + 1$, $y(\pi) = \pi^2$, $y'(\pi) = 2\pi$;

(d) $y'''' - 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0$, $y''(0) = 1$;

(e) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Exercício 7. Use a transformada de Laplace para resolver os PVIs a seguir:

(a) $y'' + y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $f(x) = 1 - u_\pi(x)$ para $x > 0$;

(b) $y'' + 2y' + 2y = h(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $h(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi \le x < 2\pi; \\ 0, & 2\pi \le x. \end{cases}$

(c) $y'' + 4y = sen(x) - u_{2\pi}(x)\ sen(x - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

(d) $y'' + 4y = sen(x) - u_\pi(x)\ sen(x - \pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Exercício 8. Usando a integral de convolução encontre a transformada inversa de Laplace para as funções:

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$;

(b) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$.