PRIMEIRA LISTA DE CÁLCULO 4.
MATÉRIA: CÁLCULO DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

PROF. GRIGORI CHAPIRO

Esta lista corresponde aos capítulos 1,2,3 e 5 do livro do Churchill (que tem mais exercícios). Estes capítulos estão disponíveis na XEROX na pasta do Calculo IV. Não é necessário entregar a lista. Quem quiser me mostre ou entregue depois da aula.

Referências

[1] Churchill, Ruel V., *Variáveis complexas e suas aplicações*, Mac Graw-Hill, 1975.

1. Exercícios gerais

Exercício 1. Escreva definição para corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Exercício 2. Demonstre que:
(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é elemento neutro da adição ("zero"de $\mathbb{C}$).
(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é elemento neutro da multiplicação ("unidade"de $\mathbb{C}$).
(c) para $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ o inverso da adição é $w = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$.

Exercício 3. Dado $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ resolva a equação $z \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Ou seja, encontre o inverso do número complexo w)

Exercício 4. Dados números complexos $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, calcule:
(a) $z + w$; (b) $z \cdot w$; (c) $z \cdot z$; (d) z^*; (e) w^*; (f) $z \cdot z^*$; (g) $z \cdot w^*$;
(e) Represente os números z, w, z^*, w^* no gráfico.

Exercício 5. Faça a conta para mostrar que: (a) $\frac{z}{z} = 1$; (b) $z \cdot w = w \cdot z$; (c) $\frac{1}{1/z} = z$; (d) $\frac{zw}{zs} = \frac{w}{s}$, onde z, w e s são números complexos.

Exercício 6. Represente os números $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ no gráfico. Onde ficam os números reais e imaginários puros?

Exercício 7. Resolva a equação $z \cdot z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e represente os números $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e z no gráfico.

Exercício 8. Resolva a equação $z \cdot z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e represente os números $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e z no gráfico.

Exercício 9. Resolva a equação $z \cdot z = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e represente os números $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e z no gráfico.

Exercício 10. Resolva a equação $z \cdot z = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e represente os números $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e z no gráfico.

2. Contas com unidade imaginária na forma algébrica

Exercício 11. Represente os números $1 + 0i$, $-1 + 0i$, $0 + 1i$, $0 - 1i$, $-3 + 2i$ e $-3 - 2i$ no gráfico.

Exercício 12. Dados números complexos $z = -1 + 2i$, $w = 4 - 3i$, calcule:
(a) $z + w$; (b) $z \cdot w$; (c) $z \cdot z$; (d) z^*; (e) w^*; (f) $z \cdot z^*$; (g) $z \cdot w^*$. Represente os números z, w, z^*, w^* no gráfico.

Exercício 13. Resolva a equação $z \cdot z = -1$ e represente os números -1 e z no gráfico.

Exercício 14. Resolva a equação $z \cdot z = i$ e represente os números i e z no gráfico.

Exercício 15. Resolva a equação $z \cdot z = 1$ e represente os números 1 e z no gráfico.

Exercício 16. Encontre todos os números complexos z que satisfazem a equação $z \cdot z^* = 1$ e represente eles no gráfico.

Exercício 17. Dado o número complexo $z = a + ib$, encontre as partes real e complexa dos números: $\frac{z^*}{z \cdot z^*}$, $\frac{1}{2}(z + z^*)$ e $\frac{1}{2i}(z - z^*)$.

Exercício 18. Encontre todos os números complexos que satisfazem a equação

$$-i\frac{z - z^*}{z + z^*} = K,$$

onde K é um números real. Represente o conjunto das soluções no gráfico.

3. Contas com forma polar dos números complexos

Exercício 19. Escreva na forma polar seguintes números complexos: 1, -1, i, $1 + i$, $2 + 9i$, $-1 - i$.

Exercício 20. Escreva na forma algébrica seguintes números complexos: $2e^{-i\,30^o}$, $3e^{i\,45^o}$, $e^{-i\,60^o}$, $4e^{i\,180^o}$.

Exercício 21. Faça a conta para mostrar que: (a) $(e^{ia})^2 = e^{2ia}$; (b) $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$; (c) $e^{ia}e^{-ib} = e^{i(a-b)}$.

Exercício 22. Usando a forma polar dos números complexos encontre seguintes raízes: (a) $\sqrt[3]{2 + 2i}$; (b) $\sqrt[2]{i}$; (c) $\sqrt[2]{3 - 4i}$; (d) $\sqrt[2]{2}$; (e) $\sqrt[3]{1}$; (f) $\sqrt[4]{1}$. Em cada caso represente todas as raízes no gráfico.

4. Funções

Exercício 23. Dada a função complexa $f(z) = z^2 - 2iz + i + 3$, ache sua parte real e imaginária. Calcule o valor da função complexa nos pontos $z = 1$, $z = 1 + i$, $z = 2i$, $z = 5$.

Exercício 24. Dadas as funções complexas $f(z) = z^2 - 2iz + i + 3$ e $g(z) = 3z + i$, calcule as funções fg, $f + g$, f/g, fog. Para cada uma delas indique para quais z elas não podem ser definidas. Calcule suas partes reais e imaginárias.

5. Limites

Exercício 25. Dadas a função complexa $f(z) = z^2 - 2iz + i + 3$ ache sua parte real $(u(x, y))$ e imaginária $(v(x, y))$. Calcule $\lim_{z \to z_0}$ para (a) $z_0 = 1 + i$, (b) $z_0 = 3i$, (c) $z_0 = 5$.

Exercício 26. Dadas a função complexa $f(z) = z^2 - 4/z$ ache sua parte real $(u(x, y))$ e imaginária $(v(x, y))$. Calcule $\lim_{z \to z_0}$ para (a) $z_0 = 1 + i$, (b) $z_0 = 3i$, (c) $z_0 = 5$.

6. Derivadas

Daqui em diante indicamos por $f'(w)$ a derivada complexa $\dfrac{df}{dz}(w)$.

Exercício 27. Decore todas as regras de derivação incluindo derivada da soma, do produto, da divisão de duas funções e a Regra da cadeia!

Exercício 28. Usando os resultados citados no exercício anterior ache $f'(z)$ para: (a) $f(z) = z^3 - 2iz$; (b) $f(z) = (z + 5i)^3 * 2i$; (c) $f(z) = \dfrac{z - 1}{z^2 + 4i}$; (d) $f(z) = z^2(z^{-2} + 1)^3$.

7. Relações de Cauchy-Riemann

Exercício 29. (a) Ache a parte real e imaginária das funções citadas no Exercício 28. (b) Verifique se as relações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para as funções citadas no Exercício 28. (c) O que pode-se dizer sobre a derivada da f nos pontos onde as relações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas?

Exercício 30. Seja $z = x + i$, determine onde $f'(z)$ existe e ache seu valor para: (a) $f(z) = 1/z$; (b) $f(z) = x^2 + iy^2$; (c) $f(z) = z\,Re(z)$. Dica: para determinar onde existe a derivada pode-se usar as relações de Cauchy-Riemann ou os teoremas que relacionam as derivadas em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$.

8. Funções elementares

Exercício 31. Mostre que: (a) $\exp(0) = 1$; (b) $\exp(2 \pm 3\pi i) = -\exp(2)$; (c) $\exp(\pi i/2) = i$; (d) $\exp(\dfrac{2 + \pi i}{4}) = \sqrt{e}\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$.

Exercício 32. Exercícios 2, 3, 4 da Seção 22 do Livro do Churchill. (Pagina 47)

Exercício 33. Dado que $tg(z) = sen(z)/cos(z)$, $cotg(z) = 1/tg(z)$, $\sec(z) = 1/cos(z)$ e $cosec(z) = 1/sen(z)$, prove (e decore) que:

$$(a) \quad \frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z);$$
$$(b) \quad \frac{d}{dz}sen(z) = \cos(z);$$
$$(c) \quad \frac{d}{dz}\cos(z) = -sen(z);$$
$$(d) \quad \frac{d}{dz}tg(z) = \sec(z);$$
$$(e) \quad \frac{d}{dz}cotg(z) = -cosec(z);$$
$$(f) \quad \frac{d}{dz}\sec(z) = \sec(z)\ tg(z);$$
$$(g) \quad \frac{d}{dz}cosec(z) = -cosec(z)\ cotg(z).$$

Exercício 34. Dado que $sh(z) = (e^z - e^z)/2$, $ch(z) = (e^z + e^z)/2$, $tgh(z) = sh(z)/ch(z)$, $cotgh(z) = 1/tgh(z)$, prove (e decore) que:

$$(a) \quad \frac{d}{dz}sh(z) = ch(z);$$
$$(b) \quad \frac{d}{dz}ch(z) = sh(z);$$
$$(c) \quad \frac{d}{dz}tgh(z) = sech^2(z);$$
$$(d) \quad \frac{d}{dz}cotgh(z) = -cosech^2(z);$$
$$(e) \quad \frac{d}{dz}sech(z) = -sech(z)\ tgh(z);$$
$$(f) \quad \frac{d}{dz}cosech(z) = -cosech(z)\ cotgh(z).$$

Exercício 35. Dado $z = x + iy$, ache a partes real e imaginária de $f(z) = ch(z)$ e de $g(z) = sh(z)$.

Exercício 36. Mostre que $ch^2(z) - sh^2(z) = 1$.

Exercício 37. Mostre que $ch(-z) = ch(z)$.

Exercício 38. Mostre que $sh(-z) = -sh(z)$.

9. Logaritmo

Exercício 39. Demonstre as propriedades do valor principal de logaritmo:

$$Ln(e^z) = z;$$
$$\exp(Ln(z)) = z;$$
$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2);$$
$$Ln(\frac{z_1}{z_2}) = Ln(z_1) - Ln(z_2).$$

Exercício 40. Calcule os logaritmos: $\log(1)$, $\log(i)$, $\log(-1)$ e $\log(\sqrt{i})$.

Exercício 41. Calcule o valor principal dos logaritmos: $\log(1)$, $\log(i)$, $\log(-1)$ e $\log(\sqrt{i})$.

10. Integrais definidas

Exercício 42. Calcule a integral
$$\int_C f(z)dz$$
onde $f(z) = y - x - 3x^2 i$, C é o segmento de reta que une $z = 0$ a $z = 1 + i$. (Resp. $1 - i$)

Exercício 43. Calcule a integral
$$\int_C f(z)dz$$
onde $f(z) = e^z$, C é o segmento de arco que une $z = 1$ a $z = i$.

Exercício 44. Calcule a integral
$$\int_C f(z)dz$$
onde $f(z) = x^2 - y^2 + i(x - y^2)$, C é o segmento de reta que une a origem ($z = 0$) a $z = 3+2i$. (Resp. $3 + 2i$).

Exercício 45. Calcule a integral
$$\int_C f(z)dz$$
onde $f(z) = \sqrt{z}$, C é o segmento de arco $z = re^{i\theta}$ de $\theta = -\pi/2$ a $\theta = \pi/2$. (Resp. $2r\sqrt{2r}i/3$).

Exercício 46. Calcule a integral
$$\int_C (y - x^2)dz$$
em dois casos: (a) C é o caminho composto por dois segmentos de reta, do ponto $z = 0$ a 2 e outro do ponto $z = 2$ a $z = 2+i$. (b) C é o caminho composto por dois segmentos de reta, do ponto $z = 0$ a i e outro do ponto $z = i$ a $z = 2 + i$. (Resp. (a) -(16+21i)/6, (b) (-4+3i)/6).

Exercício 47. Exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 16 das páginas 97-99 do Churchill.

Exercício 48. Exercícios 1, 2, 3, 6 das páginas 109-110 do Churchill.

11. Integral de Cauchy

Nos exercícios abaixo calcule a integral de contorno
$$\oint_C f(z)dz \tag{11.1}$$

Exercício 49. $f(z) = z$, C é o círculo fechado $2e^{i\theta}$ com $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Exercício 50. $f(z) = z$, C é o quadrado com os vértices nos pontos $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ e $1 - i$ parametrizado no sentido anti-horário (positivo).

Exercício 51. $f(z) = 1/z$, C é o círculo fechado $2e^{i\theta}$ com $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Exercício 52. $f(z) = 1/z^2$, C é o quadrado com os vértices nos pontos $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ e $1 - i$ parametrizado no sentido anti-horário (positivo).

Exercício 53. $f(z) = 1/(z-2)^2$, C é o quadrado com os vértices nos pontos $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ e $1-i$ parametrizado no sentido horário (negativo).

Exercício 54. Exercícios 1, 2, 3, 4, 7 da página 119 do Churchill.