## $2^a$ PROVA "B" DE MÉTODOS MATEMÁTICOS 29/05/2012

PROF. GRIGORI CHAPIRO

**Nome** (letra de forma, legível), em cada folha. Não entregue esta folha.
**Todas as soluções tem que ser justificadas!**

**Questão 1.** Se as funções $y_1$ e $y_2$ são soluções LI (independentes) de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, determine para quais constantes $a_1$, $a_2$, $b_1$ e $b_2$ as funções $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ e $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$ são soluções LI da mesma EDO.

**Questão 2.** Diga se é verdadeiro (**justificando**) ou falso **(contra-exemplo)**:
(a) Toda função admissível possui transformada de Laplace.
(b) Toda função que possui transformada de Laplace é admissível.
(c) Existe função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica ímpar, tal que $f(0) \neq 0$.
(b) A função $f(x) = \text{ctg}(x+\pi)x^3 \exp(x^2+2)$ definida para $-1 < x < 1$, periódica de período 1 tem uma série de Fourier de senos.

**Questão 3.** Usando Laplace resolva o PVI: $y'' + y = x^2 + 1$, $y(\pi) = \pi^2$, $y'(\pi) = 2\pi$.

**Questão 4.** A função $f(x)$ esta definida no intervalo $0 < x < L$ por $f(x) = x^2 - 1$.
(a) Represente a função $f(x)$ por meio de uma série de Fourier de senos.
(b) Faça o gráfico do prolongamento usado acima.

**Questão 5.** Usando o método de separação de variáveis e as séries de Fourier resolva o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) dado a seguir:

$$u_t - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad u_x(0,t) = 0, u_x(2,t) = 0,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 < x < 1, \quad u_t(x,0) = x^2 - 1, \quad 0 < x < 1.$$

| $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ | $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$, $s > 0$ | $\exp(ax)$ | $\frac{1}{s-a}$, $s > a$ |
| $x^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$ | $sen(ax)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$ |
| $cos(ax)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$ | $sh(ax)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$ |
| $ch(ax)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$ | $e^{ax}sen(bx)$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$ |
| $e^{ax}cos(bx)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$ | $u_c(x)$ | $\frac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$ |
| $u_c(x)f(x-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ | $e^{cx}f(x)$ | $F(s-c)$ |
| $f(cx)$ | $\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$, $c > 0$ | $\frac{x^{n-1}e^{kx}}{(n-1)!}$ | $\frac{1}{(s-k)^n}$, $1 \leq n$, $k < s$ |

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\,\mathcal{L}\{g(x)\} = F(s)G(s)$$