Capítulo 2.1: Equações Lineares – 1ª ordem; Método dos Fatores Integrantes

- Uma EDO de primeira ordem tem a forma geral

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

onde f é linear em y. Exemplo:

a) Equações com coeficientes constantes;

$$y' = -ay + b$$

b) Equações com coeficientes variaveis:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Capítulo 2.1:
Caso dos Coeficientes Constantes

- Para uma EDO linear com coeficientes constantes,

$$y' = -ay + b,$$

observe que podemos usar métodos de cálculo para resolver:

$$\frac{dy/dt}{y - b/a} = -a$$

$$\int \frac{dy}{y - b/a} = -\int a\,dt$$

$$\ln\left|y - b/a\right| = -at + C$$

$$y = b/a + ke^{at}, \;\; k = \pm e^{C}$$

Capítulo 2.1:
Caso dos Coeficientes variáveis: Método dos Fatores Integrantes

- Nos agora vamos considerar uma EDO linear de primeira ordem com coeficientes variáveis:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- O método dos fatores integrantes envolve a multiplicação desta equação por uma função $\mu(t)$, escolhida de modo que a equação resultante seja integrada facilmente.

Capítulo 2.1:
Exemplo 1: Fator de Integração

- Considere a seguinte equação:

$$y' + 2y = e^{t/2}$$

- Multiplicando ambos os lados por $\mu(t)$, nos obtemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + 2\mu(t)y = e^{t/2}\mu(t)$$

- Nós escolheremos $\mu(t)$ de modo que o lado esquerdo seja fácil de identificar a derivada. Considere a regra do produto :

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y$$

- Escolha $\mu(t)$ tal que

$$\mu'(t) = 2\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{2t}$$

Capítulo 2.1:
Exemplo 1: Solução Geral

- Com $\mu(t) = e^{2t}$, nos resolvemos a equação original da seguinte forma:

$$y' + 2y = e^{t/2}$$

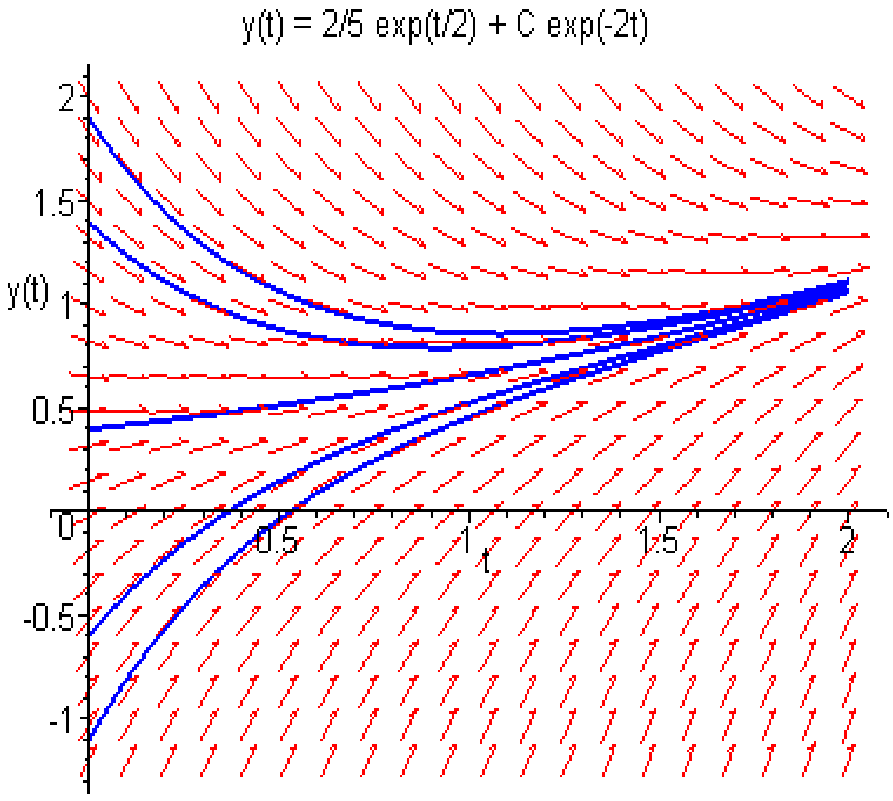
$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + 2\mu(t)y = \mu(t)e^{t/2}$$

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = e^{5t/2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{2t}y\right] = e^{5t/2}$$

$$e^{2t}y = \frac{2}{5}e^{5t/2} + C$$

$$y = \frac{2}{5}e^{t/2} + Ce^{-2t}$$



Capítulo 2.1:

Método dos Fatores Integrantes: Variável do lado direito (g(t))

- Em geral, para variável do lado direito $g(t)$, a solução pode ser encontrada da seguinte forma:

$$y' + ay = g(t)$$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + a\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

$$e^{at}\frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{at}y\right] = e^{at}g(t)$$

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)dt$$

$$y = e^{-at}\int e^{at}g(t)dt + Ce^{-at}$$

Capítulo 2.1:
Exemplo 2: Solução Geral

- Nos podemos resolver a seguinte equação

$$y' + \frac{1}{5}y = 5 - t$$

usando a formula anterior onde nos conhecemos *a* e *g(t)*:

$$y = e^{-at}\int e^{at}g(t)dt + Ce^{-at} = e^{-t/5}\int e^{t/5}(5-t)dt + Ce^{-t/5}$$

- Integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int e^{t/5}(5-t)dt &= \int 5e^{t/5}dt - \int te^{t/5}dt \\ &= 25e^{t/5} - \left[5te^{t/5} - \int 5e^{t/5}dt\right] \\ &= 50e^{t/5} - 5te^{t/5}\end{aligned}$$

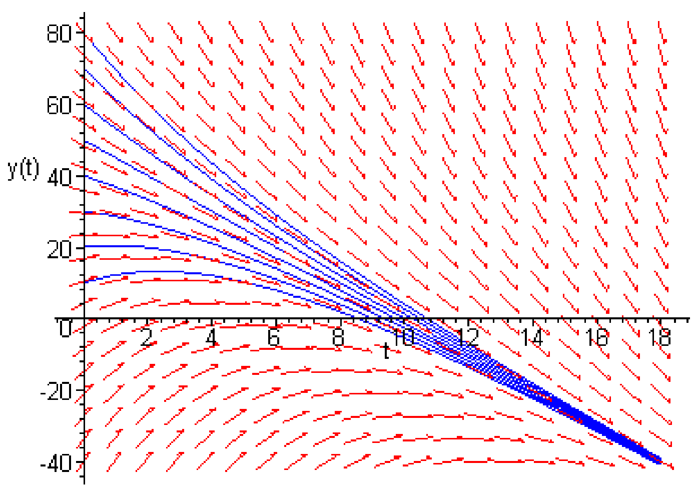
- Temos

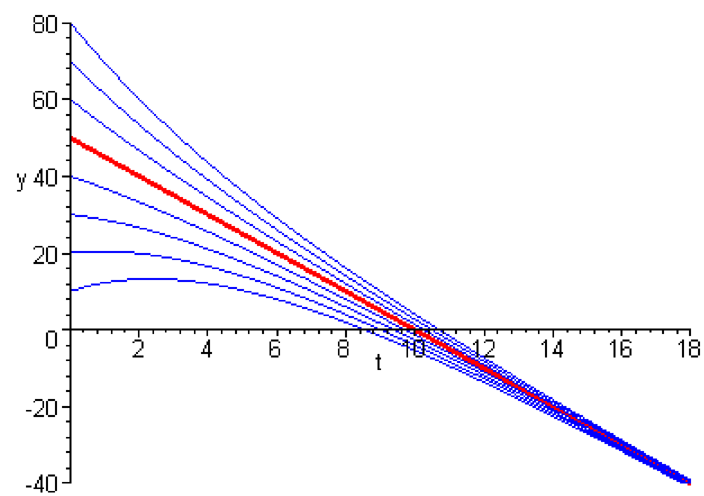
$$y = e^{-t/5}\left(50e^{t/5} - 5te^{t/5}\right) + Ce^{-t/5} = 50 - 5t + Ce^{-t/5}$$

Capítulo 2.1:
Exemplo 2: Gráfico das Soluções

- O gráfico da esquerda mostra o campo de direções junto com diversas curvas integrais.
- O gráfico na direita mostra diversas soluções, e uma solução particular (vermelho) cujo o gráfico contem o ponto (0,50).

$$y' = -\frac{1}{5}y + 5 - t \quad \Rightarrow \quad y = 50 - 5t + Ce^{-t/5}$$





Capítulo 2.1:
Exemplo 3: Solução Geral

- Nos podemos resolver a seguinte equação

$$y' - \frac{1}{5}y = 5 - t$$

usando a formula anterior onde nos conhecemos *a* e *g(t)*:

$$y = e^{-at}\int e^{at}g(t)dt + Ce^{-at} = e^{t/5}\int e^{-t/5}(5-t)dt + Ce^{t/5}$$

- Integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int e^{-t/5}(5-t)dt &= \int 5e^{-t/5}dt - \int te^{-t/5}dt \\ &= -25e^{-t/5} - \left[-5te^{-t/5} + \int 5e^{-t/5}dt\right] \\ &= 5te^{-t/5}\end{aligned}$$

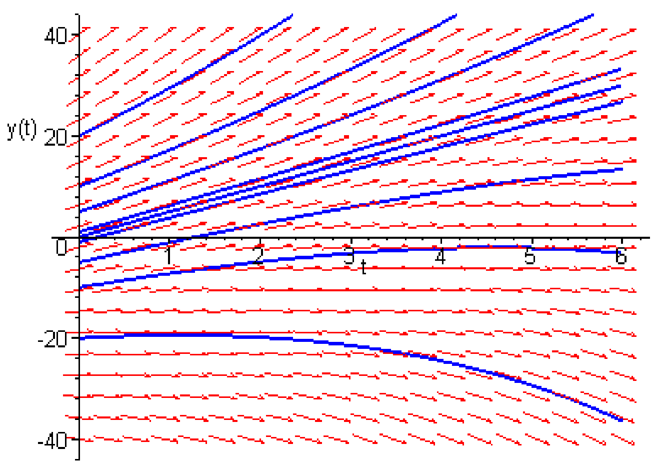
- Temos

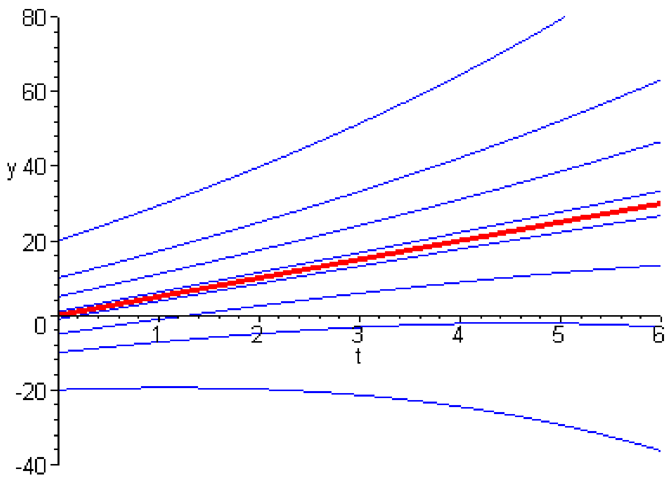
$$y = e^{t/5}\left[5te^{-t/5}\right] + Ce^{t/5} = 5t + Ce^{t/5}$$

Capítulo 2.1:
Exemplo 3: Solução Geral

- O gráfico da esquerda mostra o campo de direções junto com diversas curvas integrais.
- O gráfico na direita mostra diversas soluções, e uma solução particular (vermelho) cujo o gráfico contém a origem, o eixo-*y* separa as soluções que crescem para + ∞ daquelas que decrescem para - ∞ com $t \to \infty$.

$$y' - y/5 = 5 - t \quad \Rightarrow \quad y = 5t + Ce^{t/5}$$





Capítulo 2.1:
Método dos fatores integrantes para EDO Lineares de primeira ordem geral

- Vamos considerar uma EDO Linear de 1ª ordem geral

$$y' + p(t)y = g(t)$$

- Multiplicamos ambos os lados por $\mu(t)$, obtemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = g(t)\mu(t)$$

- Agora, precisamos encontrar $\mu(t)$ tal que $\mu'(t) = p(t)\mu(t)$, para isto basta fazer

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y$$

Capítulo 2.1:
Fator Integrante para EDO Lineares de primeira ordem geral

- Assim nós escolhemos $\mu(t)$ tal que $\mu'(t) = p(t)\mu(t)$.
- Assumindo $\mu(t) > 0$, segue que

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int p(t)dt \quad \Rightarrow \quad \ln \mu(t) = \int p(t)dt + k$$

- Tomando $k = 0$, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt},$$

e note $\mu(t) > 0$ como queríamos.

Capítulo 2.1:
Solução para
EDO Lineares de primeira ordem geral

- Assim nós temos o seguinte :

$$y' + p(t)y = g(t)$$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t), \quad \text{onde } \mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

- Então

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)y\right] = \mu(t)g(t)$$

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}, \quad onde\ \mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Capítulo 2.1:
Exemplo 4: Solução Geral

- Para resolver o P.V.I.

$$ty' - 2y = 5t^2, \quad y(1) = 2,$$

primeiro tome a forma padrão:

$$y' - \frac{2}{t}y = 5t, \quad \text{for } t \neq 0$$

- Então

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{-\int \frac{2}{t}dt} = e^{-2\ln|t|} = e^{\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1}{t^2}$$

e onde

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)} = \frac{\int \frac{1}{t^2} 5t dt + C}{\frac{1}{t^2}} = t^2\left[\int \frac{5}{t}dt + C\right] = 5t^2 \ln|t| + Ct^2$$

Capítulo 2.1:
Exemplo 4: Solução Particular

- Usando a condição inicial $y(1) = 2$ e a solução geral

$$y = 5t^2 \ln|t| + Ct^2,$$

segue que

$$y(1) = 2 = C \quad \Rightarrow \quad y = 5t^2 \ln|t| + 2t^2$$

ou equivalente,

$$y = 5t^2 \left(\ln|t| + 2/5\right)$$

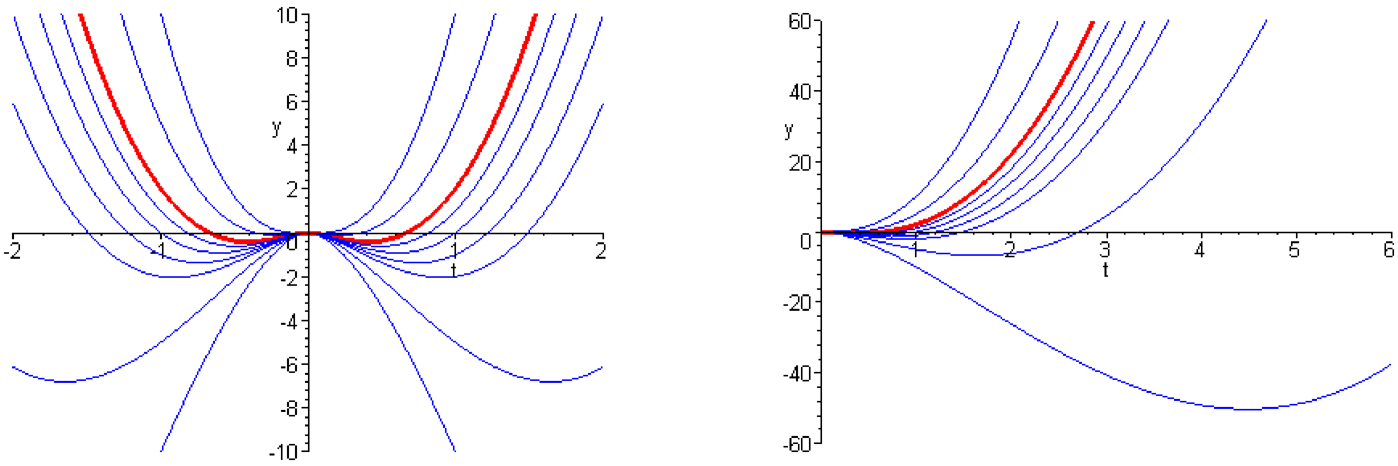
Capítulo 2.1:
Exemplo 4: Gráfico da Solução

- Os gráficos abaixo mostram diversas curvas integrais para a equação diferencial, e uma solução particular (em vermelho) cujo o gráfico contém o ponto inicial (1,2).

$$\text{PVI}: \quad ty' - 2y = 5t^2, \quad y(1) = 2$$

$$\text{Solução Geral}: \quad y = 5t^2 \ln|t| + Ct^2$$

$$\text{Solução Particular}: \quad y = 5t^2 \ln|t| + 2t^2$$



Capítulo 2.3:
Modelos com equações de primeira ordem

- Os modelos matemáticos caracterizam os sistemas físicos, usando freqüentemente equações diferenciais .
- **Construção do modelo:** Traduzindo a situação física em termos matemáticos. Claramente os princípios físicos do estado servem para governar o processo. A equação diferencial é um modelo matemático do processo, tipicamente uma aproximação.
- **Análise do modelo:** Resolvendo a equação ou obter a compreensão qualitativa da solução. Pode simplificar o modelo, contanto que os fundamentos físicos sejam preservados.
- **Comparação com experiência ou observação:** Verifica a solução ou sugere o refinamento do modelo.

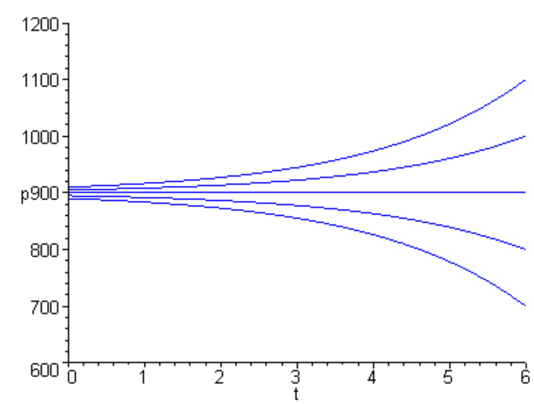
Capítulo 2.3:
Exemplo 1: Presa e Predador (Rato e Curuja)

- Supôr que uma população de ratos reproduz em uma taxa proporcional à população atual, com uma taxa constante de 0.5 ratos/mês (que supõe nenhuma coruja no inicio).
- E ainda, supor que quando uma população da coruja está presente, come 15 ratos por dia em média.
- A equação diferencial que descreve a população de ratos na presença das corujas, supondo 30 dias em um mês, é

$$p' = 0.5p - 450$$

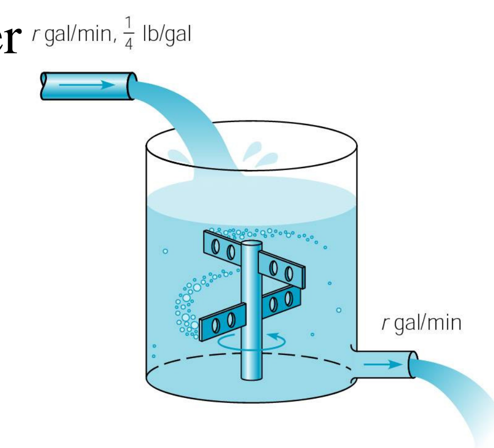
- Usando métodos de EDO e resolvendo esta equação, obtemos

$$p = 900 + ke^{0.5t}$$



Capítulo 2.3:
Exemplo 2: Solução de sal

- No instante $t = 0$, um tanque contém Q_0 lb de sal dissolvido em 100 galão de água. Suponha que água contendo ¼ lb de sal/gal está entrando no tanque a uma taxa r gal/min, e que o líquido, bem misturado, está saindo do tanque à mesma taxa.
  - (a) Determinar o PVI que descreve este processo do fluxo da solução de sal.
  - (b) Encontrar a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque em qualquer tempo dado t.
  - (c) Encontrar uma quantidade Q_L do sal $Q(t)$ no tanque após muito tempo.
  - (d) Se $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, ache o tempo T antes que o sal atinja 2% de Q_L.
  - (e) Ache taxa de fluxo r necessária se T não exceder



Capítulo 2.3:
Exemplo 2: (a) Problema de Valor Inicial

- No instante t = 0, o tanque contém Q_0 lb de sal dissolvido em 100 gal de água. Suponha que água contendo ¼ lb de sal/gal entrando no tanque a uma taxa de r gal/min, e que o líquido, bem misturado, está saindo do tanque à mesma taxa.
- Supondo que o sal nem é acrescentado ou retirado do tanque, e a distribuição do sal no tanque é uniforme (agitado). Então

$$dQ/dt = \text{taxa de entrada - taxa de saída}$$

- Taxa de entrada: (1/4 lb sal/gal)(r gal/min) = (r/4) lb/min
- Taxa de Saída: Se houver $Q(t)$ lbs sal no tanque no tempo t, então a concentração de sal é $Q(t)$ lb/100 gal, e flui para fora na taxa de $[Q(t)r/100]$ lb/min.
- Assim nosso PVI é $$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}, \quad Q(0) = Q_0$$

Capítulo 2.3:

Exemplo 2: (b) Encontrando a Solução $Q(t)$

- Para encontrar a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque em toda a hora dada t, nós necessitamos resolver o PVI

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}, \quad Q(0) = Q_0$$

- Para resolver, nos usamos o método dos Fatores Integrantes:

$$\mu(t) = e^{at} = e^{rt/100}$$

$$Q(t) = e^{-rt/100}\left[\int \frac{re^{rt/100}}{4} dt\right] = e^{-rt/100}\left[25e^{rt/100} + C\right] = 25 + Ce^{-rt/100}$$

$$Q(t) = 25 + \left[Q_0 - 25\right] e^{-rt/100}$$

ou

$$Q(t) = 25\left(1 - e^{-rt/100}\right) + Q_0\, e^{-rt/100}$$

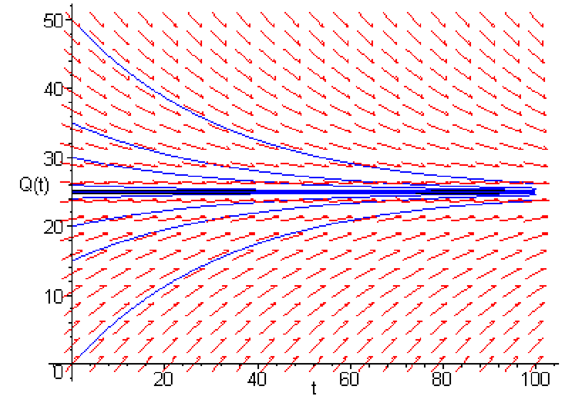
Capítulo 2.3:
Exemplo 2:
(c) Encontrando a Quantidade limite Q_L

- Agora, vamos encontrar a quantidade limite Q_L de sal $Q(t)$ no tanque após um longo tempo:

$$Q_L = \lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty}\left(25 + [Q_0 - 25]e^{-rt/100}\right) = 25\,\text{lb}$$

- Faz o sentido o resultado, desde que com o tempo a solução de sal que entra substituirá a solução de sal original no tanque. Desde que a solução que entra contenha 0.25 lb sal / gal, e o tanque 100 gal, eventualmente o tanque conterá 25 lb sal.
- O gráfico mostra as curvas integrais para $r = 3$ e diferentes valores de Q_0.

$$Q(t) = 25\left(1 - e^{-rt/100}\right) + Q_0\, e^{-rt/100}$$



Capítulo 2.3:
Exemplo 2: (d) Encontrando o tempo T

- Suponha $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$. Para encontrar o T antes que $Q(t)$ está em 2% de Q_L, note primeiro $Q_0 = 2Q_L = 50$ lb, onde

$$Q(t) = 25 + \left[Q_0 - 25\right]e^{-rt/100} = 25 + 25e^{-.03t}$$

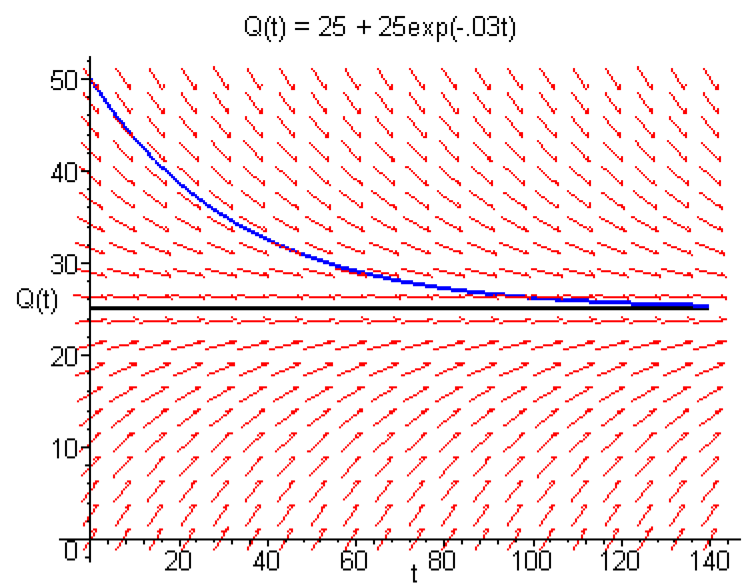
- Agora, 2% de 25 lb é 0.5 lb, e portanto resolvendo

$$25.5 = 25 + 25e^{-0.03T}$$

$$0.02 = e^{-0.03T}$$

$$\ln(0.02) = -0.03T$$

$$T = \frac{\ln(0.02)}{-0.03} \approx 130.4 \text{ min}$$



Capítulo 2.3:
Exemplo 2: (e) Encontrando a Taxa de fluxo

- Para encontrar a taxa de fluxo r pedida se T não exceder 45 minutes, da parte (d) onde $Q_0 = 2Q_L = 50$ lb, temos

$$Q(t) = 25 + 25e^{-rt/100}$$

e a curvas solução decresce de 50 para 25.5.

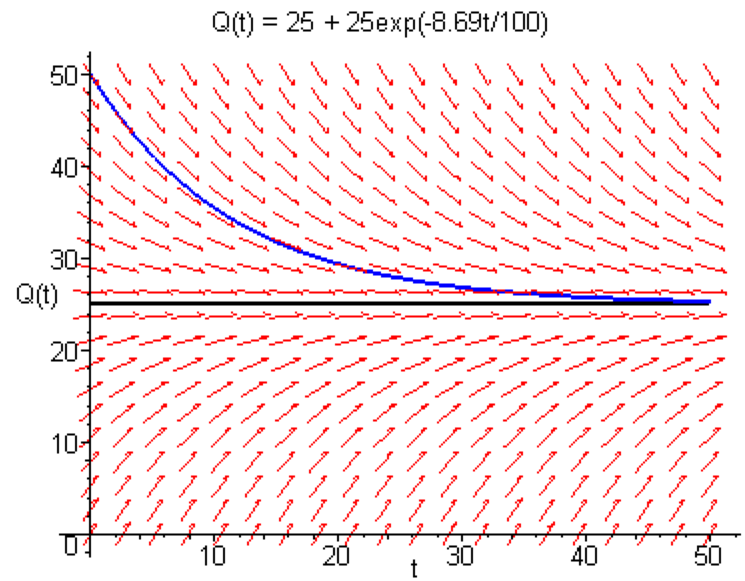
- Assim resolvemos

$$25.5 = 25 + 25e^{-\frac{45}{100}r}$$

$$0.02 = e^{-0.45r}$$

$$\ln(0.02) = -.45r$$

$$r = \frac{\ln(0.02)}{-0.45} \approx 8.69 \text{ gal/min}$$



Capítulo 2.3:
Exemplo 2: Discussão

- Desde que a situação é hipotética, o modelo é válido.
- Se as taxas de fluxo são como enunciadas e se a concentração de sal no tanque é uniforme, então a equação diferencial fornece uma descrição precisa do processo de fluxo.
- Os modelos deste tipo são usados freqüentemente em poluição de lagos, concentração de droga em órgão, etc. taxas de fluxos podem ser mais difícil de determinar, ou podem ser variáveis, e a concentração pode ser não uniforme. Também, as taxas de fluxo de entrada e fluxo de saída podem ser diferentes, o que significa que a variação da quantidade de líquido no problema também tem que ser levada em consideração.

Capítulo 2.3:
Exemplo 3: Poluição da lagoa

- Considere uma lagoa contendo inicialmente 10 million gallons de água fresca. A lagoa recebe um fluxo indesejável de produtos químicos a uma taxa de 5 million gal/ano, e a mistura sai da lagoa a uma mesma taxa. A concentração $c(t)$ de produtos químicos na água que está entrando varia periodicamente com o tempo segundo a formula:

$$c(t) = 2 + \text{sen } 2t \text{ g/gal}$$

(a) Construir um modelo matemático deste processo de fluxo e determinar uma quantidade $Q(t)$ de tóxico despejado na lagoa no instante t.

(b) Gráficar a solução e descrever em palavras o efeito da variação da concentração de produtos químicos entrando.

Capítulo 2.3:
Exemplo 3: (a) PVI

- A lagoa contém inicialmente 10 million gallons de água fresca. A lagoa recebe um fluxo indesejável de produtos químicos a uma taxa de 5 million gal/ano, e a mistura sai da lagoa a uma mesma taxa. A concentração é $c(t) = 2 + \text{sen } 2t$ g/gal o despejo de produtos químicos entrando.
- Assumindo que os produtos químicos nem é criado ou destruído na lagoa, e a distribuição dos produtos químicos na lagoa é uniforme (agitado).
- Então
$$dQ/dt = \text{taxa de entrada - taxa de saida}$$
- Taxa de Entrada: $(2 + \text{sen } 2t \text{ g/gal})(5 \times 10^6 \text{ gal/ano})$
- Taxa de Saída: Se existe $Q(t)$ g despejo de produtos químicos na lagoa no tempo t, assim a concentração é $Q(t)$ lb/10^7 gal, e a taxa do fluxo de saída é $[Q(t) \text{ g}/10^7 \text{ gal}][5 \times 10^6 \text{ gal/ano}]$

Capítulo 2.3:
Exemplo 3:
(a) PVI

- Temos então
  - Taxa de Entrada: $(2 + \text{sen } 2t$ g/gal$)(5 \text{ x } 10^6$ gal/ano$)$
  - Taxa de saída: $[Q(t)$ g/10^7 gal$][5 \text{ x } 10^6$ gal/ano$] = Q(t)/2$ g/ano.
- Assim PVI é

$$\frac{dQ}{dt} = (2 + \text{sen } 2t)(5 \text{ x } 10^6) - \frac{Q(t)}{2}, \;\; Q(0) = 0$$

- Mudança de Variável: Seja $q(t) = Q(t)/10^6$. Assim

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{2} = 10 + 5 \text{ sen } 2t, \;\; q(0) = 0$$

Capítulo 2.3:
Exemplo 3:
(a) Resolvendo o PVI

- Resolvendo o PVI

$$q' + q/2 = 10 + 5\,\text{sen}\,2t, \quad q(0) = 0$$

nos usamos o método dos fatores integrantes:

$$\mu(t) = e^{at} = e^{t/2}$$

$$q(t) = e^{-t/2} \int e^{t/2} \left(10 + 5\,\text{sen}\,2t\right) dt$$

- Usando integração por partes e das condições iniciais, nos obtemos por simplificação,

$$q(t) = e^{-t/2} \left[20e^{t/2} - \frac{40}{17} e^{t/2} \cos 2t + \frac{10}{17} e^{t/2}\,\text{sen}\,2t + C \right]$$

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17}\,\text{sen}\,2t - \frac{300}{17} e^{-t/2}$$

Capítulo 2.3:

Exemplo 3: (a) Integração por partes

$$\int e^{t/2}\,\text{sen}\,2t\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{4}\left(\int e^{t/2}\cos 2t\,dt\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{t/2}\,\text{sen}\,2t - \frac{1}{4}\int e^{t/2}\,\text{sen}\,2t\,dt\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{8}e^{t/2}\,\text{sen}\,2t - \frac{1}{16}\int e^{t/2}\,\text{sen}\,2t\,dt\right]$$

$$\frac{17}{16}\int e^{t/2}\,\text{sen}\,2t\,dt = -\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{8}e^{t/2}\,\text{sen}\,2t + C$$

$$\int e^{t/2}\,\text{sen}\,2t\,dt = -\frac{8}{17}e^{t/2}\cos 2t + \frac{2}{17}e^{t/2}\,\text{sen}\,2t + C$$

$$5\int e^{t/2}\,\text{sen}\,2t\,dt = -\frac{40}{17}e^{t/2}\cos 2t + \frac{10}{17}e^{t/2}\,\text{sen}\,2t + C$$

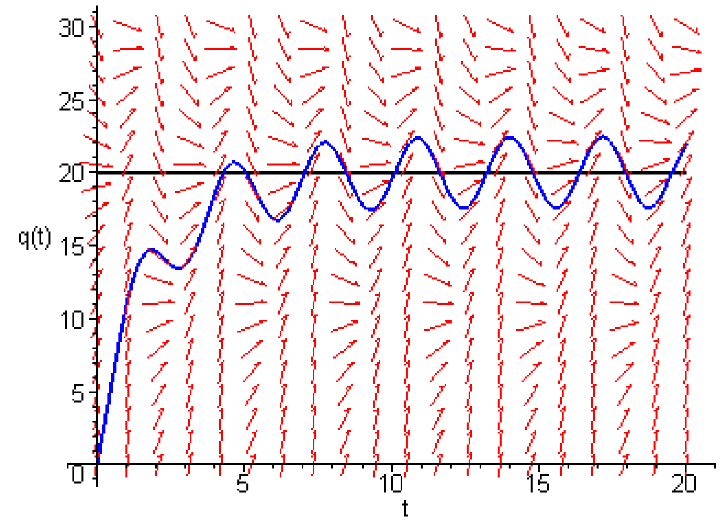
Capítulo 2.3:
Exemplo 3: (b) Análise da Solução

- Assim o problema de valor inicial e a solução são

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{2}q=10+5\,\text{sen}\,2t,\;\; q(0)=0$$

$$q(t)=20-\frac{40}{17}\cos 2t+\frac{10}{17}\text{sen}\,2t-\frac{300}{17}e^{-t/2}$$

- O gráfico da solução junto com o campo de direções para a equação diferencial é dado.
- Note que o termo exponencial é importante para *t* pequeno, mas decai rapidamente para um *t* grande. Também, *q = 20* seria a solução de equilibrio se não fosse os termos *sen(2t)* e *cos(2t)*.



Capítulo 2.4: Diferenças entre equações lineares e não-lineares

- Recordamos que EDO's de 1ª ordem tem a forma $y' = f(t, y)$, e é linear se f é linear em y, e não linear se f é não linear em y.
- Exemplos: $y' = ty - e^t$ (Linear), $y' = ty^2$ (Não Linear).
- As equações lineares e não-lineares de 1ª ordem diferem de varias maneiras:
  - A teoria que descrevem a existência e o unicidade das soluções, e os domínios correspondentes, são diferentes .
  - As soluções das equações lineares podem ser expressadas nos termos de uma solução geral, que não é geralmente o caso para equações não-lineares .
  - As equações lineares possuem soluções definidas explicitamente enquanto as equações não-lineares não(geralmente), e as equações não-lineares podem ou não ter soluções definida implicitamente.
- Para ambos os tipos de equações, a construção numérica e gráfica das soluções é importante .

Capítulo 2.4:
Teorema 2.4.1

- Considere o PVI de uma EDO de 1ª ordem Linear:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = g(t), \quad y(0) = y_0$$

Se as funções p e g contínuas em um intervalo aberto (α, β) contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única solução $y = \phi(t)$ que satisfaz o PVI para cada t em (α, β).

- **Esboço da prova :** Este resultado foi discutido no capítulo anterior:

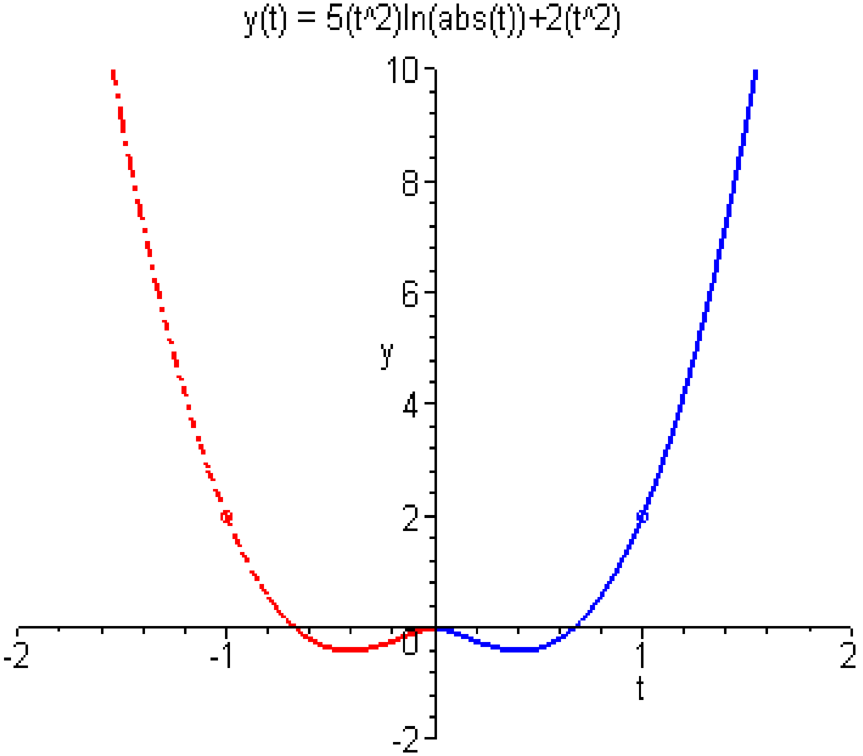
$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(t)\,g(t)\,dt + y_0}{\mu(t)}, \quad onde\ \mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$$

Capítulo 2.4:
Exemplo 1: PVI Linear

- Relembrando o seguinte PVI linear:

$$ty' - 2y = 5t^2, \quad y(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 5t^2 \ln|t| + 2t^2$$

- A solução deste PVI é definida para $t > 0$, o intervalo em que $p(t) = -2/t$ é contínua.
- Se a condição inicial é $y(-1) = 2$, então a solução é dada pela mesma expressão, mas é definida para $t < 0$.
- Em qualquer dos casos o Teorema 2.4.1 garante que solução é única no intervalo correspondente.



Capítulo 2.4:
Intervalo de definição: Equações Lineares

- Pelo teorema 2.4.1, a solução do PVI

$$y' + p(t)y = g(t), \quad y(0) = y_0$$

existe em todo ponto do intervalo próximo $t = t_0$ no qual p e g são continuas.

- As assintóticas verticais ou outras descontinuidades da solução podem ocorrer somente em pontos da descontinuidade de p ou g.
- Entretanto, a solução pode ser diferenciável em pontos da descontinuidade de p ou g. (Ver Cap 2.1: Ex.: 3).

Capítulo 2.4:
Soluções Gerais

- Para uma equação linear de 1ª ordem, é possível obter uma solução que contem uma constante arbitrária, de que todas as soluções seguem especificando valores para esta constante.
- Para equações não-lineares, tais soluções gerais podem não existir. Isto é, mesmo que uma solução que contem uma constante arbitrária possa ser encontrada, pode haver outras soluções que não podem ser obtidas especificando valores para esta constante.
- Considerar o exemplo 4: A função $y = 0$ é uma solução da equação diferencial, mas não pode ser obtida especificando um valor para c na solução encontrada usando a separação das variáveis:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{t+c}$$

Capítulo 2.4:
Soluções Explícitas: Equações Lineares

- Pelo Teorema 2.4.1, Uma solução do PVI

$$y' + p(t)y = g(t), \quad y(0) = y_0$$

existe em todo ponto do intervalo próximo de $t = t_0$ no qual p e g são continuas.

- A solução possui uma representação explícita,

$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(t) g(t) dt + y_0}{\mu(t)}, \quad onde\ \mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s) ds},$$

e pode ser avaliado em todo o valor apropriado de t, contanto que as integrais necessárias possam ser calculadas .

Capítulo 2.4:
Aproximação Explícita da Solução

- Para equações lineares de 1ª ordem, uma representação explícita para a solução pode ser encontrada, contanto que as integrais necessárias possam ser resolvidas.
- Se as integrais não puderem ser resolvidas, segue os métodos numéricos que são usados freqüentemente para aproximar as integrais .

$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(t) g(t) dt + C}{\mu(t)}, \quad onde\ \mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s) ds}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mu(t) g(t) dt \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(t_k) g(t_k) \Delta t_k$$