

LISTA DE EDO

PROF. GRIGORI CHAPIRO

1. TEOREMAS DE PICARD E PEANO

Questão 1. (a) Enuncie Teorema de Picard.

(b) Dê uma idéia da demonstração do Teorema de Picard.

Questão 2. Considere um retângulo $P = \{(t, x); |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\} \subset \mathbb{R}^2$ e duas funções localmente lipshitzianas $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $f < g$ em P . Sejam as funções ϕ e ψ soluções de $x' = f(t, x)$ e $x' = g(t, x)$, respectivamente, definidas para $t_0 \leq t \leq c$, $\phi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$. Prove que $\phi(t) \leq \psi(t)$, para $t_0 \leq t \leq c$.

Questão 3. Prove ou dê contra-exemplo:

(a) Considere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

É possível que existam $t_1 \neq t_2$, tais que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, porém $\phi'(t_1) \neq \phi'(t_2)$?

(b) Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$.

É possível que existam $t_1 \neq t_2$, tais que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, porém $\phi'(t_1) \neq \phi'(t_2)$?

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, contínua, periódica $f(t, x) = f(t + 1, x)$ e Lipschitziana no intervalo $[0, 1]$. Prove que toda solução $\phi(t, t_0, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$ é periódica com $\phi(t, t_0, x_0) = \phi(t + 1, t_0 + 1, x_0)$.

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existem duas soluções

$\phi_1, \phi_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

tais que $\text{Graf}(\phi_1) \cap \text{Graf}(\phi_2) = \{(0, p), (1, q)\}$, com p e q - reais. O conjunto $\text{Graf}(\phi_1) \cup \text{Graf}(\phi_2)$ é fronteira de uma região D homeomorfa a um disco. Prove que para todo $d \in D$ existe uma solução ϕ de (1.1) tal que seu gráfico contém $(0, p)$, $(1, q)$ e d .

Questão 6. Faça os exercícios 3, 5, 6, 11, 13, 14, 15, 16, 17 do Capítulo 1 do livro do Sotomayor.

Questão 7. Mostre que uma condição suficiente para que $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja contração é que exista $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $|A'| \leq \lambda < 1$. A condição $|A'| < 1$ não garante isso.

2. DEPENDÊNCIA CONTÍNUA DE SOLUÇÕES DOS DADOS INICIAIS

Questão 8. Dada uma EDO $x' = f(t, x, \lambda)$ (f - função contínua) com a solução $\phi(t, t_0, x_0, \lambda_0)$. Usando o resultado sobre a dependência contínua de soluções dos dados iniciais, prove a dependência contínua dos dados iniciais e parâmetros.

Dica: 1. Enuncie o resultado de dependência contínua da solução dos dados iniciais.

2. Enuncie o resultado de dependência contínua da solução dos dados iniciais e parâmetros.

3. Encontre a relação de um com outro.

3. EQUAÇÕES LINEARES

Questão 9 (Revisão da Álgebra Linear). Encontre todas as matrizes reais $A \in M_{n \times n}$ diferentes de I tais que $A^3 = I$. (Dica: classifique as 2×2 primeiro, depois generalize)

Questão 10. Reescreva o PVI: $y''' - y'' - y' + y = e^{4t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$ na forma padrão.

Questão 11. Seja $A \in M_{n \times n}$ - atrator. Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} = 0_{n \times n}.$$

(i.e. todas as coordenadas de e^{tA} tendem a 0.)

Questão 12. Considere que a EDO linear de coeficientes constantes $x' = Ax$ é um atrator, prove que o seu fluxo leva qualquer volume em um volume menor.