Introdução ao Método de Elementos Finitos

Duilio Conceição

Departamento de Matemática
UFRRJ

3 de fevereiro de 2012

Desigualdade de Poincará-Friedrichs

Ω contido em um cubo n-dimensional de lado s.
Então

$$\|v\|_0 \leq s|v|_1; \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

[CASO $\Omega = (a,b)$. $s = b - a$.]
$C_0^\infty(a,b)$ é denso em $H_0^1(a,b)$
Seja $v \in C_0^\infty(a,b)$. Então $v(a) = v(b) = 0$

$$v(x) = v(a) + \int_a^x v'(t)\ \mathrm{dt} = \int_a^x v'(t)\ \mathrm{dt}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|v(x)| = \left| \int_0^x 1.v'(t)\ \mathrm{dt} \right|$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
|v(x)| &= \left| \int_0^x 1.v'(t)\ \mathrm{dt} \right| \\
&\leq \left(\int_0^x 1^2\ \mathrm{dt} \right)^{1/2} \left(\int_0^x |v'(t)|^2\ \mathrm{dt} \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Dai, com $s = b - a$,

$$
|v(x)|^2 \leq (x-a) \int_0^x |v'(t)|^2\ \mathrm{dt} \leq s \int_a^b v'(t)^2\ \mathrm{dt}
$$

Integrando obtemos

$$
\int_0^x |v(x)|^2\ \mathrm{dt} \leq s^2 \int_a^b v'(t)^2\ \mathrm{dt}
$$

(veja Dietrich Braess para demonstração do resultado)

Segue pela Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

Teorema

Se Ω é limitado então $|\cdot|_1$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$, equivalente a norma $\|\cdot\|_1$. Além disso, se Ω esta contido no cubo de lado s

$$|v|_1 \leq \|v\|_1 \leq (1+s)|v|_1, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Com isso, em $H_0^1(\Omega)$,

$$|v|_1 = a(v,v)^{1/2} = \left(\int_\Omega (\nabla v)^2\right)^{1/2}$$

é chamada norma da energia. Denotada também por $\|\cdot\|_a$.

Observação

A desigualdade também é valida nos seguintes espaços

- $H_0^1(\Omega, \Gamma)$, i.e., $u = 0$ em $\Gamma \subset \Omega$.
- $V = \{v \in H^1(\Omega); \int_\Omega v \, \mathrm{dx} = 0\}$ (Funções com média zero)

Teorema de Lax-Milgram

Seja V um espaço de Hilbert, e $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear tal que

- continuidade: $a(u,v) \leq \alpha \|u\| \|v\|; \ \forall u, v \in V$.
- coercividade: $a(v,v) \geq \beta \|v\|^2$.

Então, dado um funcional linear limitado $f : V \to \mathbb{R}$, existe uma única solução $u \in V$ do problema variacional

$$a(u,v) = (f,v); \qquad \forall v \in V$$

Eq. de Poisson com condição de Dirichlet

EDP

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Problema Variacional

Achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V$$

onde

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{dx} \quad \text{e} \quad (f, v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, \mathrm{dx}$$

- Existência de solução
- Unicidade

Continuidade: $a(u,v) \leq \alpha \|u\| \|v\|$
Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{dx} \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{dx} \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$
$$= |u|_1 |v|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$$

Coercividade: $a(v,v) \geq \beta \|v\|_1^2$
Dado $v \in H_0^1(\Omega$, pela desig. de Poincaré-Friedrichs:

$$|v|_1 \geq C \|v\|_1$$

Logo, $a(v,v) = |v|_1^2 \geq \beta \|v\|_1^2$

Existência e Unicidade

Como $a(\cdot,\cdot)$ é continua e coerciva, então pelo teorema de Lax-Milgram, o problema variacional possui solução unica.

Problema Variacional

Achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in V$$

EDP

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{para todo } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Problema Variacional

Achar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} a(u,v) = (f,v) & \forall v \in V \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Continuidade: (OK)

UFRRJ

Redução a uma condição de fronteira homogênea

Seja $u_o : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função em $C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, tal que

$$u_o(x) = g(x) \qquad \text{em } \partial\Omega$$

Se u é solução da EDP original, então $w = u - u_o$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w = f_1 & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $f_1 = f + \Delta u_o$
Se w é solução da EDP acima, então $u = w + u_o$ é solução da EDP original.

Seja $u_o \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ tal que $u_o(x) = g(x)$ em $\partial\Omega$.

Achar $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(w,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Este problema admite soluçã única!
Lembremos que $(-\Delta u_o, v) = a(u_o, v)$
O problema variacional acima é equivalente a

Achar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} a(u,v) = (f,v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u - u_o \in H_0^1(\Omega) & \text{(formulaçã fraca da condição em } \partial\Omega) \end{cases}$$

EDP

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \nabla u(x) \cdot \vec{n} = g(x) & \text{para todo } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Consideremos $V = \{v \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega u(x)\,\mathrm{dx} = 0\}$

Problema Variacional

Achar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V.$$

A desig. de Poincaré-Friedrichs é válida em V.
Podemos aplicar o teorema de Lax-Milgram.

$\mathcal{T}^h$ uma malha em Ω.
$V^h \subset H^1(\Omega)$ espaço de elementos finitos
Como V^h é subespaço fechado de $H^1(\Omega)$, pode-se aplicar o teorema de Lax-Milgram.

Problema Variacional

Achar $u^h \in V_0^h$ tal que

$$a(u^h, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V_0^h$$

onde $V_0^h = \{v \in V^h; v(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$

Interpretação Geométrica de Elementos Finitos:
Note que $\langle u, v\rangle = a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{dx}$ é um produto interno em $H_0^1(\Omega)$.

Problema Variacional

Achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V$$

V^h espaço de elementos finitos

Problema Variacional (elementos finitos)

Achar $u^h \in V^h$ tal que

$$a(u^h, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V^h$$

Para qualquer $v \in V^h \subset H_0^1(\Omega)$

$$a(u - u^h, v) = a(u, v) - a(u^h, v) = (f, v) - (f, v) = 0.$$

[FIGURA. ORTOGONALIDADE]

Definimos o funcional linear $J : V \to \mathbb{R}$

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v)$$

Prob. Minimização (M)

Achar $u \in V$ tal que

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in V$$

(isto é, u é mínimo de J em V)

Prob. Variacional (V)

Achar $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = (f,v), \qquad \forall v \in V$$

Os problemas (M) e (V) são equivalentes.

Demonstração:

Seja $u \in V$ a solução de V.
Seja $v \in V$. Ponha $w = v - u \in V$.

$$\begin{aligned} J(v) = J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - (f, u+w) \\ &= (1/2)a(u,u) - (f,u) + a(u,w) - (f,w) + (1/2)a(w,w) \\ &= J(u) + 0 + (1/2)a(w,w) \geq J(u). \end{aligned}$$

$$a(u,w) = (f,w)$$
$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u)$$

Demonstração

Seja u solução de (M), i.e., $J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in V$
Fixemos $v \in V$. Para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$ temos que
$w = u + \varepsilon v \in V$, e

$$J(u) \leq J(u + \varepsilon v)$$

Definimos a função real g

$$g(\varepsilon) = J(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - f(u + \varepsilon v)$$
$$\frac{1}{2}a(u, u) + \varepsilon(u, v) + \frac{\varepsilon^2}{2}a(v, v) - (f, u) - \varepsilon(f, v)$$

Note que $g(0) = J(u)$ e portanto $g(0) \leq g(\varepsilon)$.
0 é um mínimo de g, done $g'(0) = 0$.

$$g'(\varepsilon) = a(u, v) - (f, v) + \varepsilon a(v, v)$$
$$g'(0) = a(u, v) - (f, v) = 0$$

Consideremos

- $u \in H_0^1(\Omega)$ a solução de $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
- $u^h \in V_0^h \subset H_0^1(\Omega)$ solução de $a(u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_0^h$.

Lema de Céa

Existe $C > 0$ tal que

$$\|u - u^h\|_1 \leq C \inf_{v \in V_0^h} \|u - v\|_1$$

Demonstração do lema

Pela desig. de Poincaré-Friedrichs

$$\begin{aligned} \|u-u^h\|_1^2 \leq c_1|u-u^h|_1^2 &= c_1 a(u-u^h, u-u^h) \\ & c_1\left[a(u-u^h,u) - {\color{red}a(u-u^h,u^h)}\right] \\ & c_1 a(u-u^h,u) \end{aligned}$$

Note que $a(u-u^h,v)=0$, $\forall v \in V_0^h \subset H_0^1(\Omega)$.
Para todo $v \in V_0^h$, pela desig. de Cauchy-Schwarz e Poincaré

$$\begin{aligned} a(u-u^h,u) &= a(u-u^h,u) - a(u-u^h,v) \\ &= a(u-u^h,u-v) \leq c_2\|u-u^h\|_1\|u-v\|_1 \end{aligned}$$

Então, com $C = c_1c_2$,

$$\|u-u_h\|_1^2 \leq C\|u-u_h\|_1\|u-v\|_1 {\color{red}\Rightarrow} \|u-u_h\|_1 \leq C\|u-v\|_1$$

Vamos construir um operador

$$\mathcal{I}^h : C(\Omega) \to V^h$$

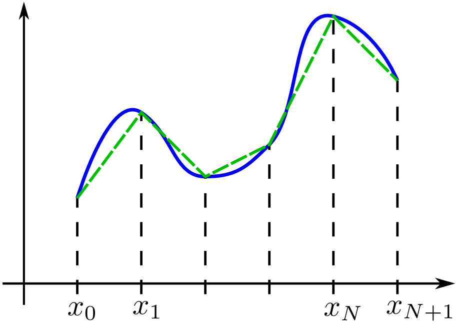
Consideremos como exemplo o espaço de elementos finitos

$$V_h = \{v \in C(\Omega); v_{|_{[x_i, x_{i+1}}} \text{ é linear}\}$$

Operadores de Interpolação

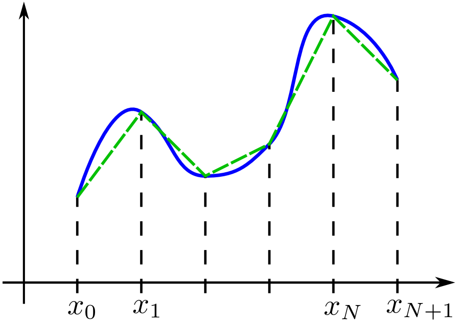
Dada $f \in C(\Omega)$ definimos $\mathcal{I}^h(f) \in V$ tal que

$$\mathcal{I}^h(f)(x_i) = f(x_i)$$



Outra forma: $\mathcal{I}^h(f)(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i \phi_i(x)$ onde $\alpha_i = f(x_i)$.

- $\mathcal{I}^h$ está bem definido
  - Dado $f \in C(\Omega)$ existe um único elemento $v \in V^h$ tal que $\mathcal{I}^h(f) = v$.
- $\mathcal{I}^h$ não é uma função injetiva...



Pelo lema de Céa

$$\|u - u^h\|_1 \leq C \inf_{v \in V^h} \|u - v\|_1 \leq C\|u - \mathcal{I}^h(u)\|_1$$

Lema

Seja $\Omega = (a, b)$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
$\mathcal{T}^h$ uma familia de triangulações quase-uniforme de Ω.
V_0^h espaço de funções lineares por partes associado a $\mathcal{T}^h$.
Então

$$\|u - \mathcal{I}^h u\|_1 \leq Ch\|u\|_2$$

onde

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega f(x)^2 |\nabla f|^2 + \sum_{ij} (\partial_{ij} f)^2 \,\mathrm{dx} \right)^{1/2}$$

- Note que $u \in H^2(\Omega)$.
- Pelo lema obtemos o seguinte resultado

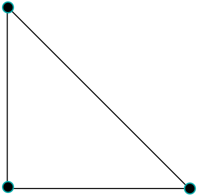
$$\|u - u^h\|_1 \leq Ch\|u\|_2$$

  - A convergência é linear
  - Quando h é dividido por 2 espera-se que o erro seja dividido por 2

Há outras interpolações: por exemplo Clement.

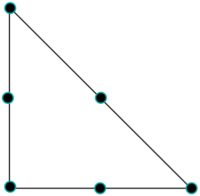
Malha triangular

1. Linear $\mathcal{M}_0^1$



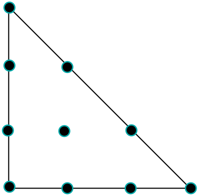
- elemento C^0 (continuo)
- $\Pi_{\text{ref}} = \mathcal{P}_1$
- Graus de liberdade por elemento: 3

2. Quadrático, $\mathcal{M}_0^2$



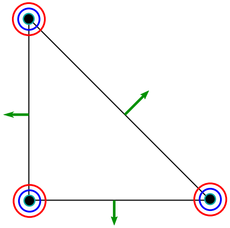
- elemento C^0
- $\Pi_{\text{ref}} = \mathcal{P}_2$
- Graus de liberdade por elemento: 6

3. Cúbico $\mathcal{M}_0^3$



- elemento C^0
- $\Pi_{\text{ref}} = \mathcal{P}_3$
- Graus de liberdade por elemento: 10

4. Argyris



- elemento C^1 (consideravelmente mais difícil implementação)
- $\Pi_{\text{ref}} = \mathcal{P}_5$
- Graus de liberdade por elemento: 21
- Derivadas até ordem 2 nos vértices
- derivada normal no ponto médio das faces

Bilinear FIGURA

- elemento C^0
- $\Pi_{\text{ref}} \subset \mathcal{P}_2$
- Graus de liberdade por elemento: 4
- $u_{|\partial T_k} \in \mathcal{P}_1$:
  - linear nas arestas do elemento

Teorema

$t \geq 2$.
$\mathcal{T}^h$ triangulação shape-regular de Ω. Então existe C tal que

$$\|u - \mathcal{I}^h u\|_m \leq C h^{t-m} |u|_t, \quad \forall u \in H^t(\Omega)$$

onde

- $0 \leq m \leq t$
- $\mathcal{I}^h$ é o operador de interpolação por polinômios de grau $t-1$.

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u & \text{em } \Omega \\ u(0,x) = u_o(x) & \text{em } \Omega \text{ condição inicial} \\ u(t,x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde k é a condutibilidade do meio.
Considerando $v \in H_0^1(\Omega)$, e integrando em ambos os lados da EDP

$$\int_\Omega u_t v(x)\, \mathrm{dx} = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, \mathrm{dx}$$

ou

$$\int_\Omega u_t v(x) + \nabla u \cdot \nabla v\, \mathrm{dx} = 0.$$

Usando series de Taylor ($\kappa = \Delta t$)

$$u(t+\kappa, x) = u(t, x) + \kappa \partial_t u(t, x) + \kappa^2 r(t, x)$$

onde $r(t, x)$ é o resto, que é uniformemente limitado em t e x.

$$\partial_t u(t, x) = \frac{u(t+\kappa, x) - u(t, x)}{\kappa} + \kappa r(t, x)$$

O erro nesta aproximação é da ordem de κ. Denotemos $u^n(x) = u(t_n, x)$, onde $t_n = n\kappa$. Então

$$\partial_t u(t, x) \equiv \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\kappa}$$

UFRRJ

Fazendo uma discretização no tempo do tipo Euler reverso

$$\int_\Omega \frac{u^{n+1} - u^n}{\kappa} v(x) + \nabla u^{n+1} \cdot \nabla v \text{ dx} = 0.$$

ou

$$\int_\Omega (u^{n+1} - u^n) v(x) + \kappa \nabla u^{n+1} \cdot \nabla v \text{ dx} = 0.$$

Donde

$$\int_\Omega u^{n+1} v(x) + \kappa \nabla u^{n+1} \cdot \nabla v \text{ dx} = \int_\Omega u^n v(x) \text{ dx}$$

A forma bilinear agora é

$$a(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) + \kappa \nabla u \cdot \nabla v \text{ dx}$$

Se $u^n \in V^h$, então $u^{n+1} = \sum_j \alpha_j^{n+1}\phi_j \qquad u^n = \sum_j \alpha_j^n \phi_j$
Tomando $v = \phi_i(x)$, o lado esquerdo fica

Se $u^n \in V^h$, então $u^{n+1} = \sum_j \alpha_j^{n+1}\phi_j \qquad u^n = \sum_j \alpha_j^n \phi_j$
Tomando $v = \phi_i(x)$, o lado esquerdo fica

$$\int_\Omega \sum_j \alpha_j^{n+1}\phi_j(x)\phi_i(x)\,\mathrm{dx} + \kappa \int_\Omega \nabla\left(\sum_j \alpha_j^{n+1}\phi_j(x)\right)\cdot\nabla\phi_i(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \sum_j \alpha_j^{n+1}\int_\Omega \phi_j(x)\phi_i(x)\,\mathrm{dx} + \kappa\sum_j \alpha_j^{n+1}\int_\Omega \nabla\phi_j(x)\cdot\nabla\phi_i(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \sum_j \alpha_j^{n+1}\left(\int_\Omega \phi_j(x)\phi_i(x)\,\mathrm{dx} + \kappa\int_\Omega \nabla\phi_j(x)\cdot\nabla\phi_i(x)\,\mathrm{dx}\right)$$

$$(A)_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_j(x)\cdot\nabla\phi_i(x)\,\mathrm{dx} \qquad (M)_{ij} = \int_\Omega \phi_j(x)\phi_i(x)\,\mathrm{dx}$$

M é chamada matriz de massa.

O lado direito

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^n \phi_i(x)\ \mathrm{dx} &= \int_\Omega \sum_j \alpha_j^n \phi_j(x)\phi_i(x)\ \mathrm{dx}\\ &= \sum_j \alpha_j^n \int_\Omega \phi_j(x)\phi_i(x)\ \mathrm{dx}\end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = (b)_i = \sum_j \alpha_j^n \int_\Omega \phi_j(x)\phi_i(x)\ \mathrm{dx} = M\mathbf{u}^n$$

onde $\mathbf{u}^n = (\alpha_1^n, \cdots, \alpha_N^n)$.

$$(M + \kappa A)\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{b}$$