4^a LISTA DE MÉTODOS MATEMÁTICOS - PGMC
MATÉRIA: SÉRIES DE FOURIER E APLICAÇÕES

PROF. GRIGORI CHAPIRO

Esta lista corresponde ao capítulo 8 do livro do E. Kreyszig e aos capítulos 1 e 2 do livro do D. G. Figueredo.

Referências

[1] Kreyszig, E., *Matemática superior*, LTC Editora,1969.
[2] Figueiredo, D.G., *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Coleção Euclides, IMPA/CNPq, 1986.

1. Séries de Fourier

Exercício 1. Determinar a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π:

(a) $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$;

(b) $f(x) = \begin{cases} x - \pi & (-\pi < x < 0); \\ 0 & (0 < x < \pi). \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & (-\pi < x < 0); \\ \pi & (0 < x < \pi). \end{cases}$

Exercício 2. Classificar se as seguintes funções são pares, ímpares ou nenhuma das duas: (a) $x + x^3$, (b) $|x|$, (c) e^x.

Exercício 3. Provar que se a função $f(x)$ possui os coeficientes de Fourier a_n^1 e b_n^1 e a função $g(x)$ possui os coeficientes de Fourier a_n^2 e b_n^2 logo os coeficientes de Fourier da função $f(x) + g(x)$ são $a_n^1 + a_n^2$ e $b_n^1 + b_n^2$.

Exercício 4. Determinar a série de Fourier da função f periódica de período T:
(a) $f(x) = x \quad (-1 < x < 1); \quad T = 2$;

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & (-2 < x < 0); \\ 0 & (0 < x < 2); \end{cases} \qquad T = 4$;

(c) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + t & (-\frac{1}{2} < t < 0); \\ \frac{1}{2} - t & (0 < t < \frac{1}{2}); \end{cases} \qquad T = 1.$

Exercício 5. Usando o prolongamento represente seguintes funções f por meio de uma série de Fourier de cossenos e faça o gráfico do prolongamento:
(a) $f(x) = 1 \quad (0 < x < 1)$;

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < L); \\ 0 & (L < x < 2L); \end{cases}$

(c) $f(x) = 1 - x \quad (0 < x < L)$;

(d) $f(x) = sen(\frac{\pi x}{2L}) \quad (0 < x < L)$;

Exercício 6. Dada a função $f(x) = x\ sen(x)$, $-\pi < x < \pi$, periódica de período 2π,
(a) Encontre a série de Fourier que representa $f(x)$;
(b) Usando a identidade de Parseval calcule a integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Exercício 7. Dada a função $f(x) = sen(x)$, $-\pi < x < \pi$, periódica de período 2π,
(a) Encontre a série de Fourier que representa $f(x)$;
(b) Integrando a série de Fourier do ítem (a) encontre a série de Fourier que representa a função $g(x) = cos(x)$.

Exercício 8. Dada a função $f(x) = x^3$, $-1 < x < 1$, periódica de período 2,
(a) Encontre a série de Fourier que representa $f(x)$;
(b) Integrando a série de Fourier do ítem (a) encontre a série de Fourier que representa a função $g(x) = x^4$.

Exercício 9. Dada a função $f(x) = e^x$, $-1 < x < 1$, periódica de período 2,
(a) Encontre a série de Fourier que representa $f(x)$;
(b) Verifique que a derivada de $f(x)$ possui série de Fourier.
(c) Usando a letra (a) encontre a série de Fourier que representa a derivada da $f(x)$.

Exercício 10. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0; \\ 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

periódica de período 2,
(a) Encontre a série de Fourier que representa $f(x)$;
(b) Verifique que a derivada de $f(x)$ possui série de Fourier.
(c) Derive a série de Fourier da letra (a) e identifique uma função que possui essa série de Fourier.

Exercício 11. Para os ítens a seguir diga se é verdadeiro ou falso, justificando a sua resposta:
(a) Dada a função $f(x) = x^3 cos(x)$, $-\pi < x < \pi$, periódica de período 2π a sua série de Fourier é uma série de cossenos.
(b) Dada a função $f(x) = x^2 sen(x)$, $-\pi < x < \pi$, periódica de período 2π a sua série de Fourier é uma série de senos.
(c) A função $f(x) = x^2$ definida para $0 < x < 1$ possui uma série de Fourier de cossenos.
(d) A função da letra acima não pode ser escrita como uma série de senos.
(e) Quando a série de Fourier de uma função periódica possui todos os coeficientes a_n iguais a zero, significa que a função é par.
(f) Estudar cálculo é legal.
(g) Existe uma função que é par e ímpar simultaneamente.

(h) Função

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x < 1; \\ 0, & x = 0; \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

periódica de período 1 não possui série de Fourier.

2. Equação do calor

Exercício 12. Usando o método de separação de variáveis e as séries de Fourier resolva o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) dado a seguir:

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx},\ x \in \mathbb{R}, \\ &u_x(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L. \end{aligned}$$

Exercício 13. Usando o método de separação de variáveis resolva o PVIF:

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx},\ x \in \mathbb{R}, \\ &u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L. \end{aligned}$$

3. Equação da onda

Exercício 14. Usando o método de separação de variáveis resolva o PVIF:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = K u_{xx},\ x \in \mathbb{R}, \\ &u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L. \\ &u_t(x,0) = g(x),\ 0 < x < L. \end{aligned}$$

Exercício 15. Usando o método de separação de variáveis resolva o PVIF:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = K u_{xx},\ x \in \mathbb{R}, \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0, \\ &u(x,0) = 1 - x/L,\ 0 < x < L. \\ &u_t(x,0) = sen(x\pi/L),\ 0 < x < L. \end{aligned}$$

4. Questão de modelagem (opcional)

Exercício 16. Uma barra de ferro de tamanho $L[cm] \times 2[cm] \times 2[cm]$ está sendo aquecida a uma taxa de $50[kJ/s]$ pela ponta esquerda. Um aluno tem a tarefa de segurar a barra pela ponta direita o máximo de tempo que ele conseguir sem queimar. Sabendo que a condutividade térmica do ferro é $k = 20[W/(mK)]$, capacidade térmica é $C_P = 0.5[kJ/(kgK)]$ e a densidade é $\rho = 8.000[kg/m^3]$, calcule quanto tempo o aluno vai segurar a barra se ele vai largar ela assim que a temperatura da ponta que ele esta segurando atingir 50^oC?
Hipóteses físicas: Barra esta termicamente isolada com exceção da ponta esquerda. A

barra é longa e fina o suficiente para considera-la unidimensional. Inicialmente a barra esta a temperatura ambiente ($T = T_0 \approx 27^oC = 300K$).

Dicas:
Equação de conservação de energia:

$$\frac{\partial C_P T \rho}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Fluxo de energia através da ponta esquerda:

$$k\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{K}{A},$$

onde K é a energia que entra no sistema dada em $[W] = [J/s]$ e A é a área da seção da barra.
A ponta direita em isolamento térmico:

$$k\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0.$$

Condição inicial:

$$T(x,0) = T_0.$$