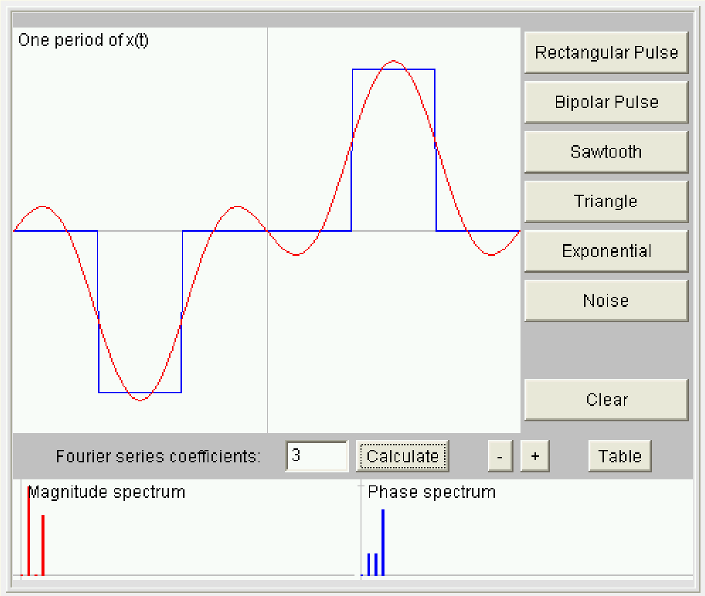
COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA

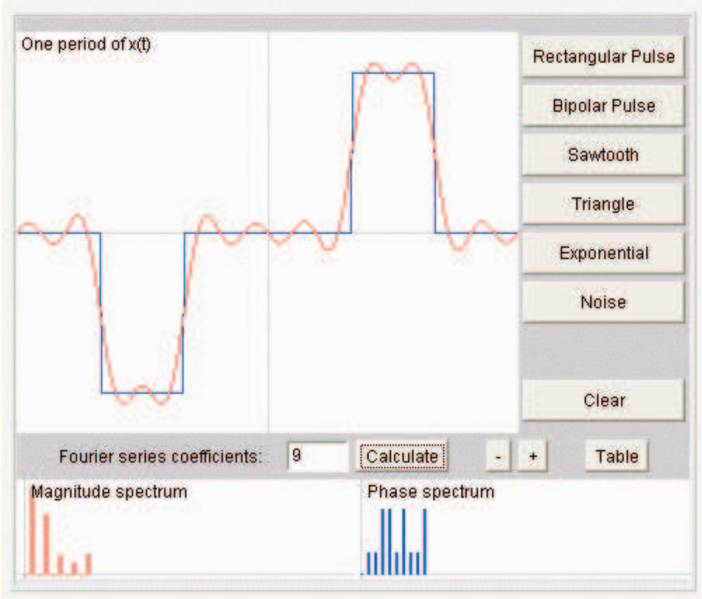
MÓDULO 1

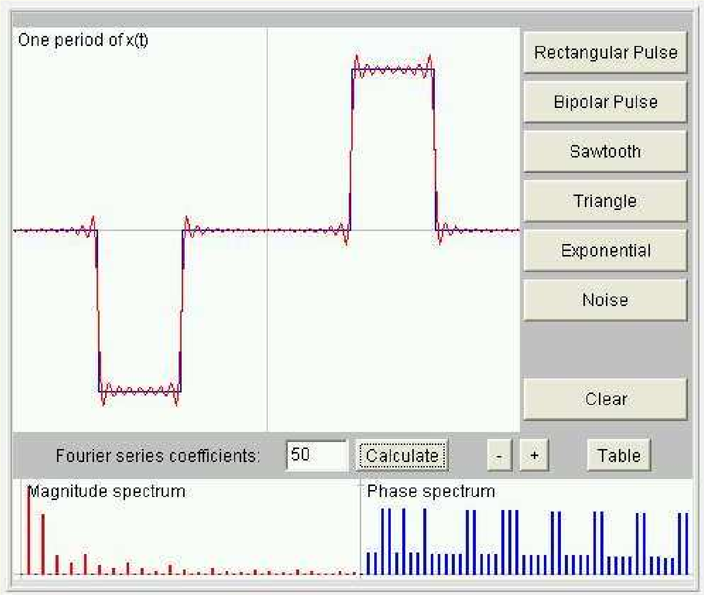
- Séries de Fourier
- Equações Diferenciais com Derivadas Parciais

- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) viveu na época de Napoleão, para quem trabalhou na França e no Egipto ocupado pelos franceses.

- Imortalizado pelas séries trigonométricas que introduziu em 1807.
- Fourier foi levado a desenvolver as (suas) séries ao estudar a propagação de calor em corpos sólidos, admitindo que essa propagação teria forma ondulatória e que a forma mais simples de uma onda é uma função senoidal;
- Existe uma vasta classe de funções, periódicas, que podem ser decompostas como soma (infinita) de senos e cossenos.


One period of x(t)
Rectangular Pulse
Bipolar Pulse
Sawtooth
Triangle
Exponential
Noise
Clear
Fourier series coefficients:
3
Calculate
-
+
Table
Magnitude spectrum
Phase spectrum


One period of x(t)
Rectangular Pulse
Bipolar Pulse
Sawtooth
Triangle
Exponential
Noise
Clear
Fourier series coefficients:
9
Calculate
-
+
Table
Magnitude spectrum
Phase spectrum


One period of x(t)
Rectangular Pulse
Bipolar Pulse
Sawtooth
Triangle
Exponential
Noise
Clear
Fourier series coefficients:
50
Calculate
-
+
Table
Magnitude spectrum
Phase spectrum

Definição

Seja f uma função real de variável real, periódica de período 2π.
Então, a expressão

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \mathrm{sen}(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \mathrm{sen}(2x) + \ldots$$

ou, sob a forma mais compacta

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right). \qquad (1)$$

designa-se **série de Fourier de** f e os coeficientes a_0, a_k, e b_k, $k = 1, 2, \ldots$, coeficientes de Fourier de f, com

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen}(kx)\, dx$$

Função periódica

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é periódica de período $T \neq 0$ se $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$. Ao menor valor de T nestas condições chama-se período fundamental ou simplesmente período.

Determinação dos coeficientes de Fourier de f

Suponhamos que a função f, periódica e de período 2π, pode ser representada por uma série convergente para $f(x)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, isto é, que

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)).$$

Determinar a_0

Integrando ambos os membros

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)) \right) \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos(kx)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \mathrm{sen}(kx)\, dx \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1\cos(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_1\mathrm{sen}(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_2\cos(2x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_2\mathrm{sen}(2x)\,dx + ...$$

calculando cada um dos integrais do segundo membro

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx = a_0 \times 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_1\cos(x)\,dx = a_1\left[\mathrm{sen}(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1\mathrm{sen}(x)\,dx = b_1\left[-\cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos(2x)\, dx = a_2 \left[\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_2 \mathrm{sen}(2x)\, dx = b_2 \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

...

assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0 \times 2\pi + 0 + 0 + \ldots \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Determinar a_1

Multiplicando ambos os membros por $\cos(x)$ e depois integrando ambos os membros

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1\cos^2(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx$$

$$+\ \int_{-\pi}^{\pi} a_2\cos(2x)\cos(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \mathrm{sen}(2x)\cos(x)\,dx + ...$$

calculando cada um dos integrais do segundo membro

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(x)\,dx = a_0 \times 0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_1\cos^2(x)\,dx = a_1\left[\frac{\mathrm{sen}(x)}{2} + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = a_1\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1 \mathrm{sen}(x)\cos(x)\ dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos(2x)\cos(x)\ dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_2 \mathrm{sen}(2x)\cos(x)\ dx = 0$$

...

assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\ dx = a_1\pi \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\ dx.$$

De modo análogo

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(x)\,dx.$$

E, em geral,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)\,dx.$$

Conclusão, se $f(x)$, $f(x)\mathrm{sen}(kx)$ e $f(x)\cos(kx)$ são integráveis então os coeficientes de Fourier existem.

Função periódica de período $2L$

Sendo $f(x)$ uma função periódica, de período $2L$ e $f(x) = f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$ então, a função $f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$ tem período 2π.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right)\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right)\cos(kt)\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right)\operatorname{sen}(kt)\, dt.$$

Como $x = \dfrac{L}{\pi}t$, $t = \dfrac{\pi}{L}x$ e $dt = \dfrac{\pi}{L}dx$, vem

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{sen}\frac{k\pi x}{L}\, dx$$

Assim, a série de Fourier de $f(x)$ de período $2L$ é dada por

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\mathrm{sen}\frac{k\pi x}{L}\right). \tag{2}$$

Condições de convergência de uma série de Fourier

Teorema

Supondo que f, é uma função periódica de período $2L$ e que $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $]-L, L[$, então a série de Fourier de f é convergente e a soma da série coincide com:

- $f(x)$ se a função é contínua no ponto x;
- $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$, se x_0 é um ponto de descontinuidade.

a b

---

[a] Uma função é seccionalmente contínua num intervalo I, limitado, se:

- Tem um número finito de pontos de descontinuidade;
- Os limites laterais existem e são finitos;
- No intervalo de pontos de descontinuidade consecutivos, a função é contínua.

[b] $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Séries de Fourier de Funções Impares e Pares

Seja f uma **função ímpar** periódica de período $2L$, então os coeficientes de Fourier,

$\boxed{a_0 = 0}$,

pois como f é ímpar, $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$

$\boxed{a_k = 0}$,

porque $f(x)\cos\dfrac{k\pi x}{L}$ é ímpar.

$$\boxed{b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx},$$

porque $f(x)\mathrm{sen}\,\dfrac{k\pi x}{L}$ é par.

Neste caso, quando f é ímpar e periódica de período $2L$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\,\mathrm{sen}\frac{k\pi x}{L} \tag{3}$$

Seja f uma **função par** periódica de período $2L$, então os coeficientes de Fourier,

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx},$$

pois como f é par, $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx},$$

porque $f(x)\cos\dfrac{k\pi x}{L}$ é par.

$\boxed{b_k = 0}$,

porque $f(x)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{k\pi x}{L}$ é ímpar.

Neste caso, quando f é par e periódica de período $2L$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{L}. \tag{4}$$

Desenvolvimento em série de Fourier de funções não periódicas

Seja $f:[a,b]$ uma função seccionalmente diferenciável. Considere-se uma função $\widetilde{f}$, periódica de período $2L$, com $2L \geq |b-a|$ e seccionalmente diferenciável tal que $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Desenvolvendo em série de Fourier a função $\widetilde{f}$, temos

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\ \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\ \mathrm{sen}\frac{k\pi x}{L}\right) &= \frac{1}{2}[\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-)] \\ &= \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] \end{aligned}$$

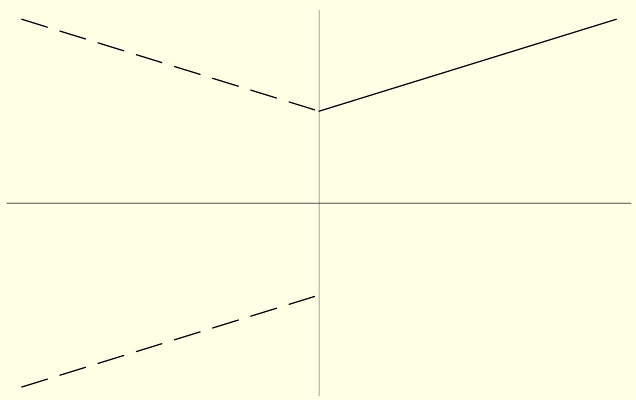
, em todos os pontos de $x \in [a,b]$

($\widetilde{f}$ diz-se um prolongamento de f).

Um caso particular importante, quando $f\,[0, L] \to \mathbb{R}$, de entre os inúmeros prolongamentos, pode-se escolher um prolongamento por uma função ímpar ou por par.

Exemplo:

f_1 é um prolongamento por uma função par e f_2 por uma função ímpar.



Desenvolvendo f_1 em série de Fourier, teríamos uma série de cosenos e f_2 uma série de senos.