UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

1º TVC - GABARITO – 1ª chamada – DATA: 29/09/2014 – VALOR: **1/3 DO TOTAL**	
DISCIPLINA: ÁLGEBRA LINEAR - Turmas especiais D e E	**PROFESSOR:** GRIGORI CHAPIRO
ALUNO(A):	**Nº DE MATRÍCULA:** ______________

Esta prova contém quarto questões. A prova deve ser feita **sem consulta** a qualquer material. **Não é permitido** usar **calculadoras**. A resolução das questões pode ser feita a lápis. Questões sem desenvolvimento não serão corrigidas.

Questão 1: Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais:
(a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y = 0,\ 2z - w = 0\}$.
(b) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + 3w = 0\}$.

Solução: Para que um subconjunto seja subespaço é necessário que ele cumpra três condições: vetor nulo tem que estar neste subconjunto, a soma de quaisquer dois elementos deste conjunto tem que estar dentro do conjunto e o produto por escalar de qualquer elemento deste conjunto tem que estar dentro do mesmo conjunto.
(a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y = 0,\ 2z - w = 0\} = \{(-2y, y, z, 2z) \in \mathbb{R}^4,\ y, z \in \mathbb{R}\}$
• Vetor nulo $(0, 0, 0, 0) \in W$, pois $0 + 2 \cdot 0 = 0$ e $2 \cdot 0 - 0 = 0$.
• Sejam $(-2y, y, z, 2z)$ e $(-2a, a, b, 2b)$ elementos de W. Note que
$(-2y, y, z, 2z) + (-2a, a, b, 2b) = (-2(y + a), y + a, z + b, 2(z + b)) \in W$.
• Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(-2a, a, b, 2b) \in W$. Note que $\alpha(-2a, a, b, 2b) = (-2(\alpha a), (\alpha a), (\alpha b), 2(\alpha b)) \in W$.

(b) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + 3w = 0\} = \{(-2y - 3w, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ y, z, w \in \mathbb{R}\}$
• Vetor nulo $(0, 0, 0, 0) \in U$, pois $0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$.
• Sejam $(-2y - 3w, y, z, w)$ e $(-2a - 3c, a, b, c)$ elementos de U. Note que
$(-2y - 3w, y, z, w) + (-2a - 3c, a, b, c) = (-2(y + a) - 3(w + c), y + a, z + b, w + c) \in U$.
• Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(-2a - 3c, a, b, c) \in U$. Note que $\alpha(-2a - 3c, a, b, c) = (-2(\alpha a) - 3(\alpha c), (\alpha a), (\alpha b), (\alpha c)) \in U$.

Pontuação: Explicação 5 pts. (a) 10 pts. (b) 10 pts.

Questão 2: Determinar dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais.
(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y\}$;
(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y - z,\ x = z\}$.

Solução: Para que um conjunto seja base de um subespaço vetorial ele tem que gerar este subespaço e ser linearmente independente (LI). A dimensão de um subespaço vetorial é o numero de vetores numa base.
(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y\} = \{(2y, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Portanto o conjunto $\beta = \{(2, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$ gera W. Como β apenas contém dois vetores, para verificar que ele é LI basta notar que os dois não saõ multiplo um do outro. Portanto β é base de W e $\dim(W) = 2$.

(b) Note que se $x = 2y - z$ e $x = z$, logo $x = y = z$. Portanto $U = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\}$. O conjunto $\beta = \{(1, 1, 1)\}$ gera W. Como β contém apenas um vetor, β é LI. Portanto β é base de U e $\dim(U) = 1$.

Pontuação: Explicação 5 pts. (a) dimensão 5 pts, base 5 pts. (b) dimensão 5 pts, base 5 pts.

Questão 3: Em relação ao produto interno usual determinar uma base ortonormal do seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$.

Solução: Primeiramente obtemos base de S. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\} = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Portanto o conjunto $\beta = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1)\}$ gera S. Como β apenas contém dois vetores, para verificar que ele é LI basta notar que os dois não saõ multiplo um do outro. Portanto β é base de S.
Para construir base ortogonal usamos o processo de Gram-Schmidt. Chamamos $u_1 = v_1 = (1, 0, 1)$ e

$$u_2 = (0, 1, 1) - \frac{<((1, 0, 1), (0, 1, 1))>}{||(1, 0, 1)||}(1, 0, 1) = (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Para construir base ortonormal precesamos apenas dividir os vetores da nova base pela sua norma.

$$w_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad w_2 = \frac{u_2}{||u_2||} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right).$$

Pontuação: Encontrar a base 5 pts. Base ortogonal 10 pts. Base ortonormal 10 pts.

Questão 4: Dadas duas bases de $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual: $\alpha = \{(1,-1,0), (-1,-1,0),\ (0,0,1)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1), (0,2,0), (1,0,1)\}$:
(a) Prove que α e β são bases ortogonais.
(b) Encontre a matriz mudança de base de α para β.

Solução: Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3 para verificar que α e β são bases basta verificar que são LI. Podemos fazer isso via determinante, por exemplo.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0, \qquad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0,$$

Portanto α e β são bases. Para verificar que são ortogonais basta fazer os produtos internos de todos os vetores:
$<(1,-1,0), (-1,-1,0)>= 0$
$<(1,-1,0), (0,0,1)>= 0$
$<(0,0,1), (-1,-1,0)>= 0$
Portanto α é ortogonal.
$<(1,0,-1), (0,2,0)>= 0$
$<(1,0,-1), (1,0,1)>= 0$
$<(0,2,0), (1,0,1)>= 0$
Portanto β é ortogonal.

Pontuação: (a) Base 15 pts. Ortogonal 10 pts. OBS: Quem notou que se um conjunto é ortogonal ele é LI, considerei questão completa. (b) ANULADA.