UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

2º TVC – 1ª chamada – DATA: 30/10/2014 – VALOR: **1/3 DO TOTAL**	
DISCIPLINA: ÁLGEBRA LINEAR - Turmas especiais D e E	**PROFESSOR:** GRIGORI CHAPIRO
NOME LEGIVEL (letra de forma):	
Turma (D ou E):	**Nº DE MATRÍCULA:**

Esta prova contém cinco questões. A prova deve ser feita **sem consulta** a qualquer material. **Não é permitido** usar **calculadora**. A resolução das questões pode ser feita a lápis. Questões sem desenvolvimento não serão corrigidas.

Questão 1: Quais das aplicações abaixo são lineares (justifique a resposta):
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (|x|, 2x + z)$,
(b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y) = (x + y, 0)$,
(c) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $R(x, y, z) = (z, \text{sen}(x), 2x + z)$,
(d) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $Q(x, y) = (x, 1, y)$.

Solução: Para que uma aplicação T seja transformação linear precisamos que T satisfaçã $T(u + v) = T(u) + T(v)$ e $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.
(a) T não é transformação linear pois se $u = (1, 1, 1)$ e $\alpha = -1$ temos $T(\alpha u) = (1, -3)$ e $\alpha T(u) = (-1, -3)$.
(b) Se $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$, teremos $S(u + v) = (x + a + y + b, 0) = (x + y, 0) + (a + b, 0) = S(u) + S(v)$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos $S(\alpha u) = (\alpha(x + y), 0) = \alpha(x + y, 0) = \alpha S(u)$. Portanto S é transformação linear.
(c) R não é transformação linear pois se $u = (\pi/2, 0, 0)$ e $\alpha = 2$ temos $R(\alpha u) = (0, \text{sen}(\pi), 2\pi) = (0, -1, 2\pi)$ e $\alpha R(u) = 2(0, \text{sen}(\pi/2), \pi) = (0, 0, 2\pi)$.
(d) Q não é transformação linear pois se $u = (1, 1)$ e $\alpha = 2$ temos $Q(\alpha u) = (2, 1, 2)$ e $\alpha Q(u) = (2, 2, 2)$.

Pontuação: Cada item 5 pts. Erro - 5 pts.

Questão 2: Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z, z)$:
(a) Encontre $\text{Im}(T)$ e $\dim(\text{Im}(T))$.
(b) T é sobrejetiva? Justifique.

Solução: (a) Podemos encontrar os vetores que geram $\text{Im}(T)$ aplicando a transformação na base canônica

$$\text{Im}(T) = [(1, 2, 0), (2, 0, 0)(-3, 1, 1)].$$

Esses vetores são LI pois

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0.$$

Assim $\beta = \{(1, 2, 0), (2, 0, 0)(-3, 1, 1)\}$ gera $\text{Im}(T)$ e é LI, portanto β é base de $\text{Im}(T)$. Como a base ter 3 vetores, temos que $\dim(\text{Im}(T)) = 3$. Como $\text{Im}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e tem dimensão 3, segue que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.
(b) Pela definição, uma função é sobrejetiva se a imagem é igual ao contradomínio. Como $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, T é sobrejetiva.

Pontuação: Total 20 pts. (a) $\dim(\text{Im}(T))$ 5 pts. $\text{Im}(T)$ 10 pts. Afirmações sem justificativa 0 pts. (b) 5 pts.

Questão 3: Sejam T e S duas transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, α base canônica de $\mathbb{R}^3$, se

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad [S]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre $[T \circ S]_\alpha^\alpha$
(b) Encontre $T \circ S$.

Solução: Sabemos que $[T \circ S]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha^\alpha [S]_\alpha^\alpha$, portando

$$[T \circ S]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Como α é base canônica, para recuperar $T \circ S$ basta multiplicar pelo vetor (x, y, z), portanto $T \circ S(x, y, z) = (2x + y, 3x + y, 2x + 4y)$.

Pontuação: (a) 10 pts. (b) 10 pts. Erro de conta -5 pts.

Questão 4: Encontre uma transformação linear não nula $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = [(1, 2, 0)]$.

Solução: Tem várias formas de fazer esse exercício. Por exemplo, podemos montar uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha o vetor $(1, 2, 0)$ e definir a transformação a partir desta base:

$$\beta = \{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Note que β de fato é base pois ela contém 3 vetores LI no espaço de dimensão 3. Definimos $T(1, 2, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (-1, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Portanto $T(x, y, z) = (2x - y, 0, z)$.

Pontuação: 10 pts. Erro de conta -5 pts. Explicação incompleta -5 pts. Quem chegou numa transformação com $[(1, 2, 0)] \subset \ker(T)$ ganhou 10 pts.

Questão 5: Prove que se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é o operador identidade, a matriz que o representa $[T]_\alpha^\alpha$ é a matriz identidade para qualquer base α de $\mathbb{R}^4$.

Solução: Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base qualquer de $\mathbb{R}^4$. Aplicando T em v_1, temos que $T(v_1) = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$, portanto a primeira coluna da matriz é

$$[1, 0, 0, 0]^T.$$

Seguindo essa construção para $T(v_2)$, $T(v_3)$ e $T(v_4)$ teremos que

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Outra solução (sugestão de aluno): Se T é identidade na base canônica e então $[T]_e^e$ é matriz identidade I. Para a matriz que representa T numa base β temos:

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^e [T]_e^e [I]_e^\beta = [I]_\beta^e I [I]_e^\beta = [I]_\beta^e [I]_e^\beta = I,$$

Pois $[I]_\beta^e$ e $[I]_e^\beta$ são inversa uma da outra.

Pontuação: 20 pts. Explicação incompleta 10 pts.