UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

| | |
|---|---|
| **3º TVC** – 1ª chamada – DATA: 01/12/2014 – VALOR: **1/3 DO TOTAL** | |
| **DISCIPLINA:** ÁLGEBRA LINEAR - Turmas especiais D e E | **PROFESSOR:** GRIGORI CHAPIRO |
| **NOME LEGIVEL (letra de forma):** | |
| **Turma (D ou E):** | **Nº DE MATRÍCULA:** |

Esta prova contém três questões. A prova deve ser feita **sem consulta** a qualquer material. **Não é permitido** usar **calculadora**. A resolução das questões pode ser feita a lápis. Questões sem desenvolvimento não serão corrigidas.

**Questão 1:** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear dado por:

$$T(x, y, z) = (x, -2x + 3y - z, -4y + 3z)\,.$$

Faça **justificando**:
(a) Encontre representação matricial de $T$.
(b) Encontre o polinômio característico de $T$.
(c) Encontre os autovalores e autovetores de $T$.
(d) Encontre o polinômio minimal de $T$.
(e) $T$ é diagonalizavel? Em caso afirativo encontre a forma diagonal de $T$ com a base correspondente.
**Dicas:** 1. Palavra **justificando** esta em negrito. 2. Será que 1 é raiz do polinômio? 3. Autovalor é a mesma coisa que valor próprio. (60 pts)

**Solução:** (a)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$p_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5.$$

(c) Dos cálculos acima vemos que $p_c(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = (1-\lambda)^2(5-\lambda)$. Portanto as raizes de $p_c(\lambda$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$ que são os autovalores de $T$. Para achar os autovetores resolvemos os sistemas lineares:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda_1 & -1 \\ 0 & -4 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos: $v_1 = (0, y, 2y)$, $y \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda_2 & -1 \\ 0 & -4 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos: $v_2 = (0, -y, 2y)$, $y \neq 0$.
(d) Temos $p_c(\lambda) = (1-\lambda)^2(5-\lambda)$. O polinômio minimal de $[T]$ é o polinômio de menor grau que anula $[T]$. Por outro lado o polinômio minimal divide o polinômio característico e possui as mesmas raizes (Teorema de Cayley-Hamilton), portanto temos que verificar se $(1-\lambda)(5-\lambda)$ anula $[T]$:

$$m([T]) = (I - [T])(5\,I - [T]) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto o polinômio minimal coincide com o polinômio característico.
(e) $T$ não é diagonalizavel. Podemos ver isso a partir da letra (c), pois $\mathbb{R}^3$ não possui uma base de autovetores de $T$. Outra forma de ver isso é a partir da letra (d), pois o polinômio minimal tem potências diferentes de $1$.

**Pontuação:** Letras (a), (b), (d), (e) 10 pts, Letra (c) 20 pts. Erro de conta -5 pts (em cada letra). Contas sem sentido 0 pts.

**Questão 2:** (a) Defina autovalor e autovetor de um operador linear $T$. (10 pts)
(b) Se $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ são autovalores de um operator linear $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ associado aos vetores $u = (1,1,1,0,0,0,0)$ e $v = (2,1,3,0,0,0,1)$, respectivamente, determine $T(4v - u)$. (10 pts)

**Solução:** (a) Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existem $\lambda \in \mathbb{R}$ e vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$, dizemos que $\lambda$ é autovalor de $T$ e $v$ é autovetor de $T$.
(b) É só aplicar a definição de autovetor e autovalor:

$$T(4v - u) = 4T(v) - T(u) = 4\lambda_1 v - \lambda_2 u = 8v - 3u = (13, 5, 21, 0, 0, 0, 8).$$

**Pontuação:** (a) Esqueceu de "não nulo" - 5 pts. (b) Erro de conta -5 pts.

**Questão 3:** (a) Quais são os autovalores da matriz identidade? (10 pts)
(b) Mostre que se $u$ e $v$ são autovalores de um operador linear $T$ ambos associados ao autovalor $\lambda$, então $3u - av$ ($a \in \mathbb{R}$) também é autovetor associado ao mesmo autovalor $\lambda$. (10 pts)

**Solução:** (a) Usando a definição da matriz identidade, temos $Iu = u$. Portanto o único autovalor de $I$ é $1$.
(b) Aplicando a definição de autovalor e autovetor, temos

$$T(3u - av) = 3T(u) - aT(v) = 3\lambda u - a\lambda v = \lambda(3u - av).$$

Portanto $3u - av$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda$.

**Pontuação:** (a) Pode resolver também via polinômio característico. (b) Erro de conta -5 pts.