A matriz associada é

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ que reduzida à forma escada torna-se

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Reinterpretando, vemos que $z$ e $t$ são livres.

Fazendo $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 + 3 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned}$$

ou $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Compare com o exemplo 1. O que você nota?

## 2.6 EXERCÍCIOS

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

2. Descreva todas as possíveis matrizes $2 \times 2$, que estão na forma escada reduzida por linhas.

3. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas.

*a)* $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

*b)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

*c)* $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 3.

5. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y \phantom{{}+z} = 1 \\ 2x \phantom{{}+5y} + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$

escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

6. Determine $k$, para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

7. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}+3x_4} + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

8. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

9. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que:
   *i*) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.
   *ii*) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.
   *iii*) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,
   *a*) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.
   *b*) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente Cr$ 1,00?

Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

10. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

11. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

17. O método de Gauss para resolução de sistemas é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve. Ele consiste em se reduzir a matriz ampliada do sistema por linha-equivalência a uma matriz que só é diferente da linha reduzida à forma escada na condição *b*) de 2.4.1, que passa a ser: *b'*) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos *abaixo* desta linha iguais a zero. As outras condições *a*, *c* e *d* são idênticas. Uma vez reduzida a matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição.

*Exemplo*:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a última matriz corresponde ao sistema:

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 = \frac{5}{2}$$
$$x_2 = -1.$$

Por substituição, $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja, $x_1 = 2$.

Resolva pelo método de Gauss os Exercícios 14, 15 e 16 e compare as respostas.

18. *a*) Mostre a proposição 2.4.3 para matrizes $2 \times 2$ quaisquer.
    *b*) Sinta a dificuldade que você terá para formalizar o resultado para matrizes $n \times m$, mas convença-se de que é só uma questão de considerar todos os casos possíveis, e escreva a demonstração. Consulte 2.7.

19. Chamamos de sistema homogêneo de $n$ equações e $m$ incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, $b_i$, são todos nulos.
    *a*) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?
    *b*) Encontre os valores de $k \in R$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

20. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

Note que podemos escrevê-lo na forma matricial

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*a*) Verifique que a matriz $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução para o sistema.

*b*) Resolva o sistema e verifique que toda "matriz-solução" é da forma

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda \in R$.

*c*) Verifique

$$\lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

é a solução do sistema homogêneo, associado ao sistema (*),

$$(**) \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*d*) Conclua, dos itens *a*), *b*) e *c*), que o conjunto-solução do sistema * é o conjunto-solução do sistema **, somado a uma solução particular do sistema *.

21. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

*a*) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo. (Atribua valores para $x$, $y$, $z$ e $w$.)

*b*) Agora, resolva efetivamente o sistema, isto é, encontre sua matriz-solução.

*c*) Resolva também o sistema homogêneo associado.

*d*) Verifique que toda matriz-solução obtida em *b*) é a soma de uma matriz-solução encontrada em *c*) com a solução particular que você encontrou em *a*).

22. Altamente motivado pelos Exercícios 20 e 21, mostre que toda matriz-solução de um sistema linear $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é a soma de uma solução do sistema ho-