

PRIMEIRA LISTA DE CÁLCULO 4. MATÉRIA: FUNÇÕES VETORIAIS

PROF. GRIGORI CHAPIRO

Esta lista corresponde ao capítulo 2 do livro "Cálculo B" da M. B. Gonçalves e D. M. Fleming. Não é necessário entregar. Quem quiser me mostre ou entregue depois da aula.

REFERÊNCIAS

[1] M. B. Gonçalves e D. M. Fleming., *Cálculo B*, Editora Pearson, 2007.

1. DEFINIÇÕES

Exercício 1. Esboçar o movimento de uma partícula no gráfico sabendo que seu movimento é descrito por:

- (a) $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(t) = (\text{sen}(t), \text{cos}(t))$;
- (b) $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (t, \text{cos}(t), 1 - \text{cos}(t))$.

Exercício 2. Dadas funções vetoriais $\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{f} = (at, bt^2, ct^3)$ e $\vec{g}(t) = (0, \text{sen}(t), \text{cos}(t))$, calcule:

- (a) $\vec{f}(x) + \vec{g}(t)$;
- (b) $\vec{f}(x) - \vec{g}(t)$;
- (c) $\vec{f}(x) \cdot \vec{g}(t)$;
- (d) $\vec{f}(x) \times \vec{g}(t)$.

Exercício 3. Recordar tudo sobre limites que você viu em Cálculo 1 e 2!

Exercício 4. Calcular seguintes limites:

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0} (\text{cos}(t), \text{sen}(t))$;
- (b) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{(\text{cos}(t-1), \text{sen}(t-1))}{t-1}$;
- (c) $\lim_{t \rightarrow 0} (e^t \text{cos}(t), t^2 - t + 1)$;
- (d) $\lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t-2}{t^2-4}, t, \frac{t^2}{t-1} \right)$;

Exercício 5. Determine os pontos onde a função $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua.

- (a) $\vec{f}(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t), t)$;

$$(b) \vec{f}(t) = \left(\frac{t-2}{t^2-4}, t, \frac{t^2}{t-1} \right);$$

$$(c) \vec{f}(t) = \left(\sqrt[3]{t^2}, \frac{t^2-1}{t-1}, \frac{1}{t^2-1} \right).$$

Exercício 6. (i) Determine se os seguintes conjuntos são curvas. (ii) Caso forem, descreva se são: fechadas, abertas, simples, planares, suaves. (iii) Para a parametrização que você usou diga se é orientada positiva ou negativamente (se for o caso). (iv) Faça o esboço do conjunto no gráfico. (v) Calcule o comprimento de arco de cada uma das curvas exceto (b) usando a parametrização.

$$(a) A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1, z = 300\}.$$

$$(b) B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y = 1, z = 2x - 2y\}.$$

$$(c) C \in \mathbb{R}^2 \text{ é a parábola } x = \sqrt{y}, 0 \leq x \leq 1.$$

$$(d) D \in \mathbb{R}^3 \text{ é o segmento de reta que junta pontos } (1, 2, 3) \text{ e } (3, 2, 1).$$

$$(e) E \in \mathbb{R}^3 \text{ é o polígono } E_1E_2E_3E_4, \text{ onde } E_1 = (0, 0, 1), E_2 = (0, 1, 1), E_3 = (1, 1, 1), E_4 = (0, 0, 0).$$

2. DERIVADA

Exercício 7. Recordar como calcular a derivada de uma função de uma e várias variáveis.

Exercício 8. Calcule a derivada das seguintes funções vetoriais $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. A derivada pode ser calculada em todos os pontos?

$$(a) \vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t), t);$$

$$(b) \vec{f}(t) = \left(\frac{t-2}{t^2-4}, t, \frac{t^2}{t-1} \right);$$

$$(c) \vec{f}(t) = \left(\sqrt[3]{t^2}, \frac{t^2-1}{t-1}, \frac{1}{t^2-1} \right).$$

Exercício 9. A posição da mosca na sala de aula (tridimensional) em função do tempo t é dada através do seguinte sistema de equações:

$$x(t) = t^2, y(t) = \sqrt{x(t) - 1}, z(t) = \frac{x(t)y(t)}{t}, 1 < t < 2.$$

(a) Qual função vetorial descreve a posição da mosca?

(b) Encontre a velocidade da mosca.

(c) Determine o tempo t quando a mosca atinge a velocidade máxima e qual é essa velocidade máxima?

Exercício 10. Para todas as funções do Exercício 2 calcule as derivadas quando for possível.

3. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Exercício 11. Seja $\vec{r} = (x, y, z)$, calcular:

(a)

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \left(x^2 + y^2, \frac{xy}{z}, \frac{x-2}{x^2-4} \right),$$

(b)

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \left(e^x, \frac{\text{sen}(y)}{y}, x + y + z \right),$$

(c)

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{x+y}{x-y}, x^2, \sqrt{z} \right),$$

(d)

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow (3,4,1)} \left(x\sqrt{y}, \frac{xz-x}{z^2-1}, y \ln(z) \right).$$

Exercício 12. Analise a continuidade das seguintes funções vetoriais:

(a) $\vec{f}(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$,

(b) $\vec{g}(x, y, z) = e^{xy}\vec{i} + \ln(y)\vec{j} + 2\vec{k}$,

(c) $\vec{h}(x, y, z) = \vec{r}/|r|$, onde $\vec{r} = (x, y, z)$.

Exercício 13. Seja $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\vec{f}(x, y, z) = (x + y + z, x^2 - y^2)$ com $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$. Determine a imagem e o gráfico de \vec{f} .

Exercício 14. Para cada uma das funções do Exercício 11 determine as derivadas parciais e a derivada direcional na direção $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Exercício 15. Exercícios 50-58, página 159, livro-texto.

4. CAMPOS ESCALARES E VETORIAIS

Exercício 16. Páginas 197-198 do livro texto. Exercícios 1-20.

Exercício 17. Páginas 212-214 do livro texto. Exercícios 1-6, 9-12, 22-26, 28-32, 36, 39, 42, 43, 47-51, 57, 61.

Exercício 18. Páginas 227-228 do livro texto. Exercícios 1(b), 4(c)(d), 5(a), 7, 10, 12, 13(b)(g), 16, 17, 18(f), 19(a).