UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

1º TVC – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DATA: 26/07/2016	
DISCIPLINA: Introdução às Variáveis Complexas - MAT031 - Turma A	**PROFESSOR:** GRIGORI CHAPIRO
NOME LEGIVEL (letra de forma):	
Curso:	**Nº DE MATRÍCULA:**

Esta prova contém quatro questões. A prova deve ser feita **sem consulta** a qualquer material. **Não é permitido** usar **calculadora**. A resolução das questões pode ser feita a lápis. Questões sem desenvolvimento não serão corrigidas.

Questão 1: (a) Prove que a função tangente $\text{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ possui inversa.
(b) Prove que essa inversa é dada por

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, /pi/2), \quad \text{arctg}(z) = \frac{1}{2i}\text{Log}(\frac{i-z}{i+z}),$$

onde Log é o ramo principal do logaritmo.
(c) Prove que existe um aberto $U \subset \mathbb{C}$ e uma função analítica $f : U \to \mathbb{C}$, tais que $\mathbb{R} \subset U$ e $f|_{\mathbb{R}} = \text{arctg}$.
(d) Prove que $\text{arctg}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}, \forall x \in (-1, 1)$.
(e) Prove que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$.

Questão 2: Dizemos que uma função inteira tem crescimento polinomial quando existe $n \geq 0$, tal que se $M(r) = sup\{|f(z)|,\ |z| = r\}$, então $M(r) \leq Kr^n$, onde constante $K > 0$. Prove que se f tem crescimento polinomial, então f é um polinômio de grau, no máximo, n.

Questão 3: Sejam p e q polinômios de uma variável tais que $\text{grau}(q) \leq \text{grau}(p) + 2$. Prove que a soma de todos os resíduos da função $p(z)/q(z)$ é zero.

Questão 4: Calcule a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ justificando os passos principais.