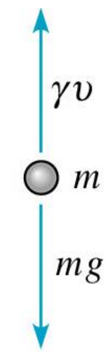
Capítulo 1.1:
Modelos Matemáticos Básicos;
Campo de Direções

- As **Equações Diferenciais** são equações que contêm derivadas.
- Os seguintes exemplos são fenômenos físicos que envolvem taxas de variação:
  - Movimento dos líquidos
  - Movimento de sistemas mecânicos
  - Fluxo da corrente em circuitos elétricos
  - Dissipação do calor em objetos contínuos
  - Ondas Sísmicas
  - Dinâmica da população
- Uma equação diferencial que descreva um processo físico é chamada freqüentemente um modelo matemático.

Capítulo 1.1:
Exemplo 1: Queda Livre

- Formular uma equação diferencial que descreve o movimento de um objeto que cai na atmosfera perto do nível do mar.
- Variáveis: tempo t, velocidade v
- 2ª Lei de Newton: $F = ma = m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$ ←força resultante
- Força da gravidade: $F = mg$ ←força descendente
- Força da resistência do ar : $F = \gamma v$ ←força ascendente
- Então

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$



- Fazendo $g = 9.8$ m/sec^2, $m = 10$ kg, $\gamma = 2$ kg/sec, nos obtemos

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.2v$$

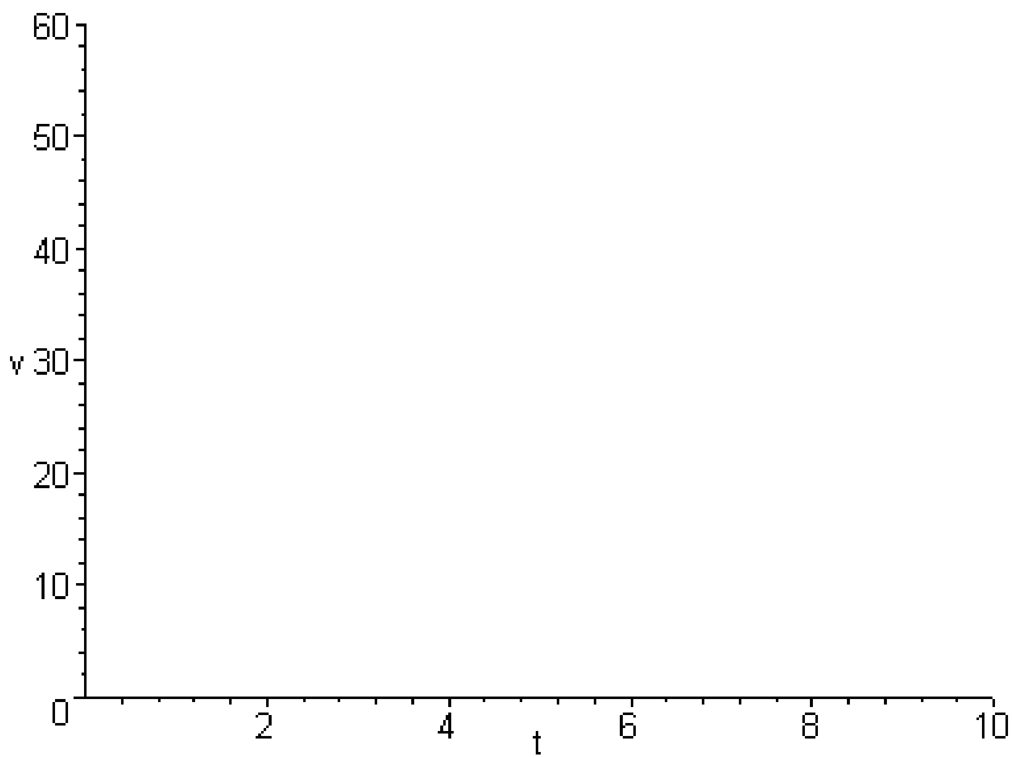
Capítulo 1.1:

Exemplo 1: Esboçando o campo de direções

$$v' = 9.8 - 0.2v$$

- Usando a equação diferencial e a tabela, traçar inclinações no eixo abaixo. O gráfico resultante é chamado campo de direções. (Note que os valores de v não dependem do t.)

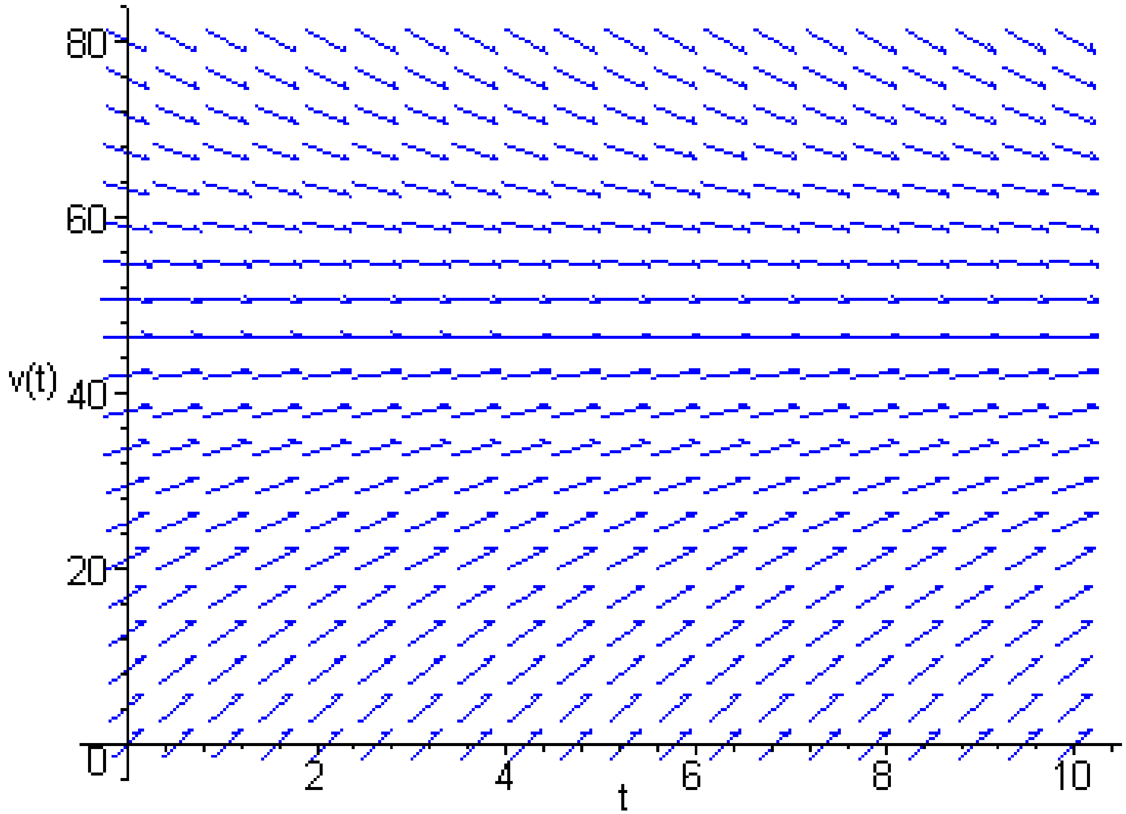
v	v'
0	9.8
5	8.8
10	7.8
15	6.8
20	5.8
25	4.8
30	3.8
35	2.8
40	1.8
45	0.8
50	-0.2
55	-1.2
60	-2.2



Capítulo 1.1:
Exemplo 1: Campos da Direções

$$v' = 9.8 - 0.2v$$

- Ao representar graficamente o campo de direções, a fim indicar todas as soluções de equilíbrio e comportamento relevante da solução. (Informação qualitativa sobre as soluções.)

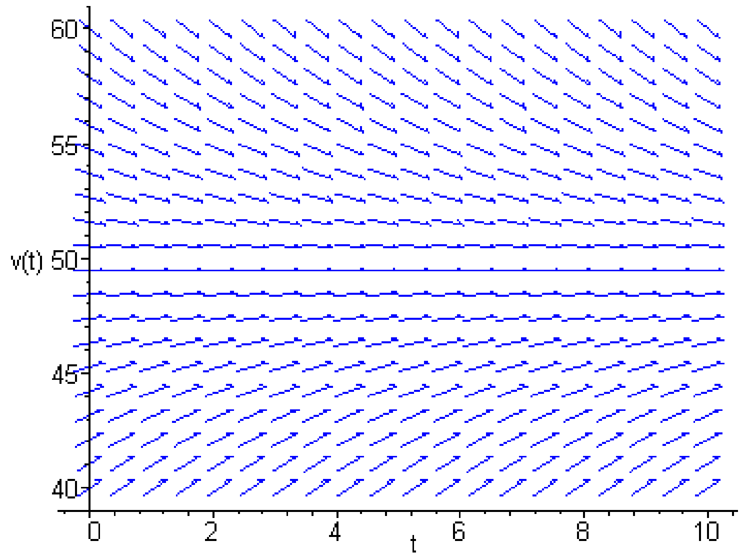


Capítulo 1.1:

Exemplo 1: **Campo de Direções** e **Solução de Equilíbrio**

$$v' = 9.8 - 0.2v$$

- As setas são linhas tangente às curvas da solução, e indicam por onde a solução está aumentando e está diminuindo.
- As curvas horizontais da solução são chamadas soluções de equilíbrio.
- Use o gráfico abaixo para encontrar a solução de equilíbrio, e para determiná-la analiticamente faça $v' = 0$.



$$Faça\ v' = 0:$$

$$\Leftrightarrow 9.8 - 0.2v = 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{9.8}{0.2}$$

$$\Leftrightarrow v = 49$$

Capítulo 1.1:
Soluções de Equilíbrio

- Em general, para uma equação diferencial do formato
$$y' = ay - b,$$
soluções de equilíbrio é encontrada fazendo $y' = 0$ e resolvendo em y:
$$y(t) = \frac{b}{a}$$

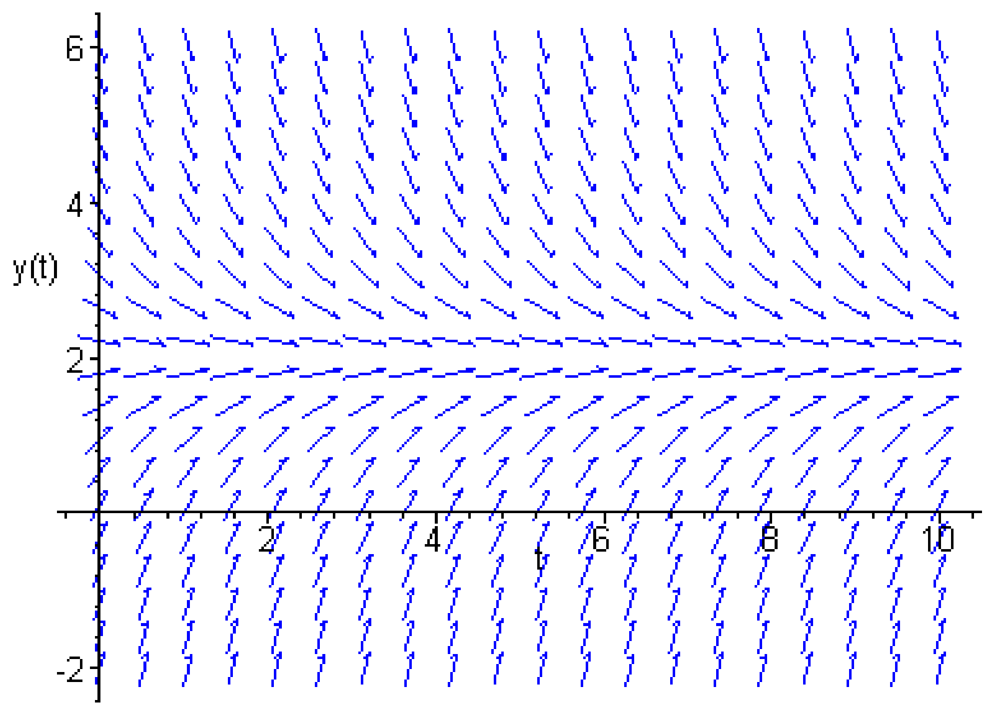
- Exemplo: Encontrar as soluções do equilíbrio das seguinte equações.

$a)\, y' = 2 - y$ $\qquad$ $b)\, y' = 5y + 3$ $\qquad$ $c)\, y' = y(y+2)$

Capítulo 1.1:
Exemplo 2:
Análise Gráfica

- Discutir o comportamento e a dependência da solução no valor inicial y(0) para a equação diferencial abaixo, usando o campo da direções correspondente.

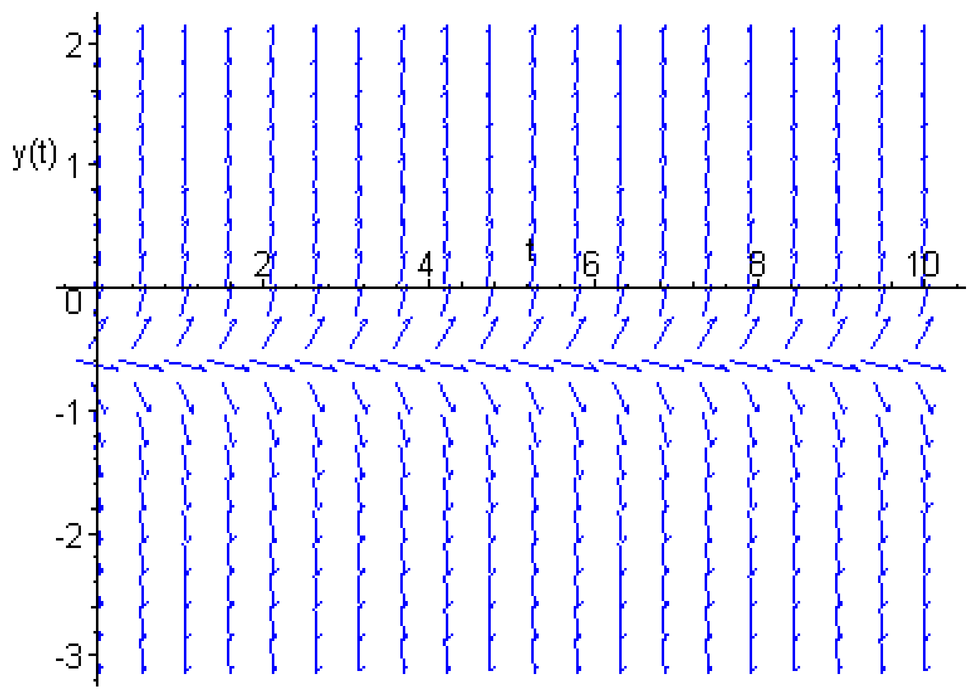
$$y' = 2 - y$$



Capítulo 1.1:
Exemplo 3:
Análise Gráfica

- Discutir o comportamento e a dependência da solução no valor inicial y(0) para a equação diferencial abaixo, usando o campo da direções correspondente.

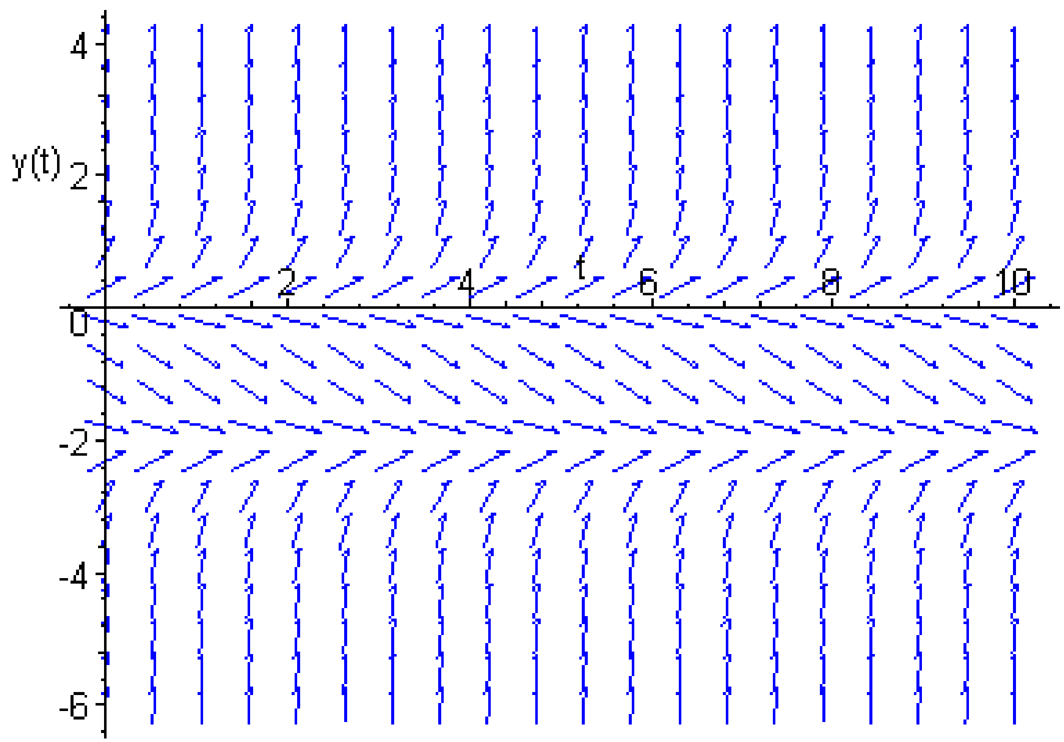
$$y' = 5y + 3$$



Capítulo 1.1:
Exemplo 4:
Análise gráfica para uma Equação Não-Linear

- Discutir o comportamento e a dependência da solução no valor inicial y(0) para a equação diferencial abaixo, usando o campo da direções correspondente.

$$y' = y(y+2)$$



Capítulo 1.1:
Exemplo 5:
Presa e Predador (Ratos e corujas)

- Considerar uma população do rato que reproduza em uma taxa proporcional à população atual, com uma taxa constante igual a 0.5 ratos/mês (na ausência de coruja).
- Quando há corujas, elas comem os ratos. Supor que as corujas comem 15 por o dia (média). Escrever uma equação diferencial que descreve a população do rato na presença das corujas. (Supor que o mês tem 30 dias.)
- Solução:

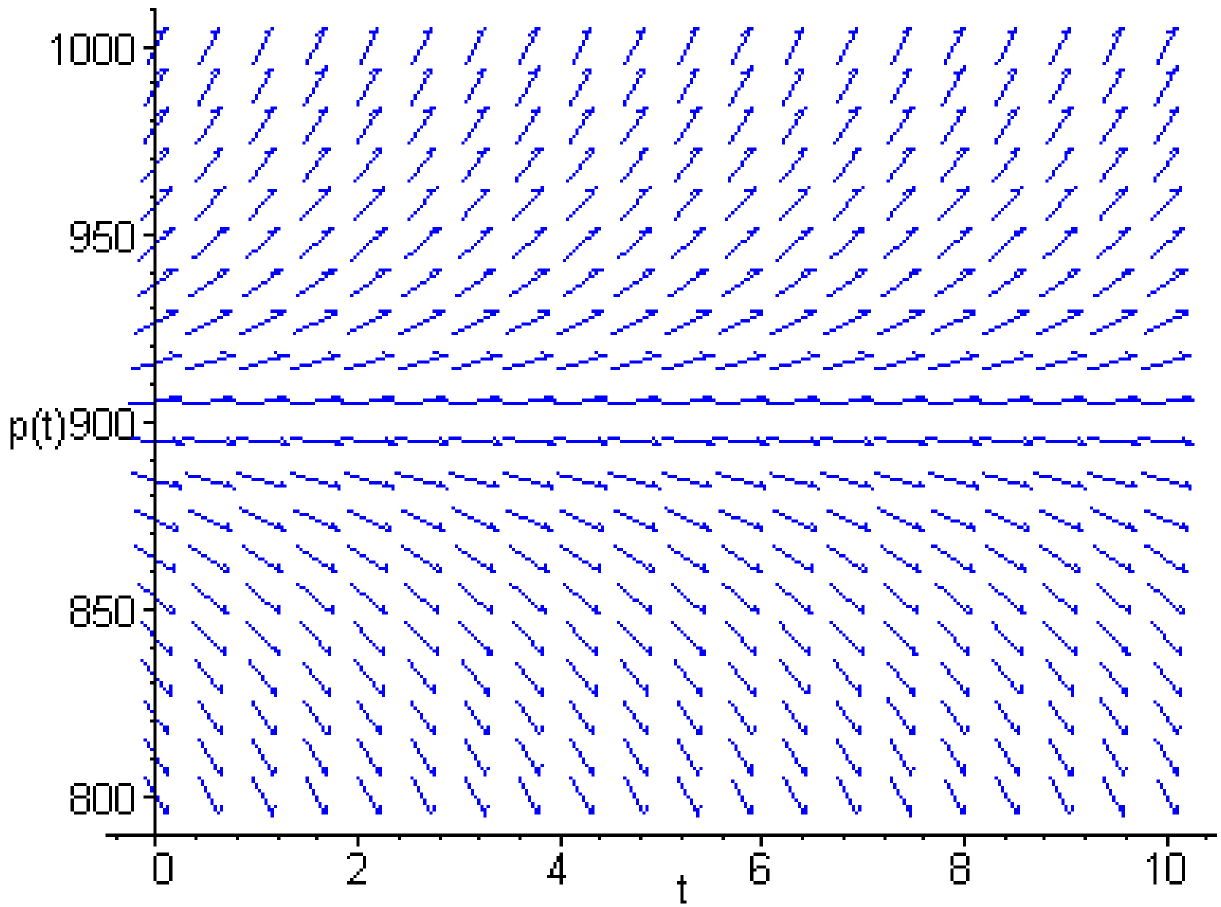
$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Capítulo 1.1:

Exemplo 5: **Campo de Direções**

$$p' = 0.5\,p - 450$$

- Discutir o comportamento da curva da solução, e encontrar a solução de equilíbrio.



Capítulo 1.1:
Exemplo 6: Poluição da água

- Uma lagoa contem 10.000 galões da água e uma quantidade desconhecida de poluição. A água que contem 0.02 gramas/galão da poluição flui na lagoa em uma taxa de 50 galões/minuto. A mistura flui para fora na mesma taxa, de modo que o nível da lagoa seja constante. Supor que a poluição está espalhada uniformemente por toda a lagoa.
- Escrever uma equação diferencial para a quantidade de poluição em toda a hora dada.
- Solução (nota: as unidades devem combinar)

$$y' = \left(\frac{.02\,\text{gram}}{\text{gal}}\right)\left(\frac{50\text{gal}}{\text{min}}\right) - \left(\frac{y\,\text{gram}}{10000\,\text{gal}}\right)\left(\frac{50\text{gal}}{\text{min}}\right)$$

$$y' = 1 - 0.005\,y$$

Capítulo 1.2:
Soluções de algumas equações diferenciais

- Recordar as equações diferenciais da queda livres e da coruja/ratos:

$$v' = 9.8 - 0.2v, \qquad\qquad p' = 0.5p - 450$$

- Estas equações têm a fórmula geral $y' = ay - b$
- Nós podemos usar métodos do cálculo resolver equações diferenciais deste tipo.

Capítulo 1.2:

Exemplo 1: Presa e Predador (Ratos e corujas)

- Para resolver a equação diferencial

$$p' = 0.5p - 450$$

nós usamos métodos do cálculo, como segue.

$$\frac{dp}{dt} = 0.5(p - 900) \;\Rightarrow\; \frac{dp/dt}{p-900} = 0.5 \;\Rightarrow\; \int \frac{dp}{p-900} = \int 0.5dt$$

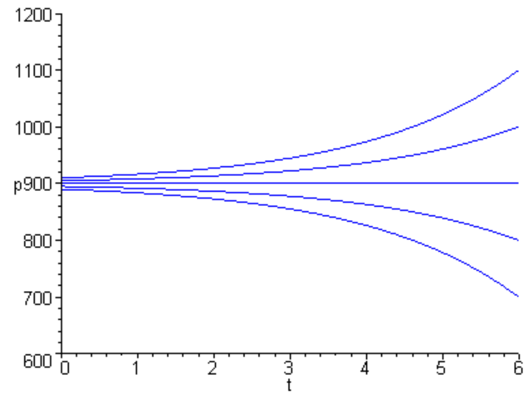
$$\Rightarrow\; \ln|p-900| = 0.5t + C \;\Rightarrow\; |p-900| = e^{0.5t+C}$$

$$\Rightarrow\; p - 900 = \pm e^{0.5t}e^{C} \;\Rightarrow\; p = 900 + ke^{0.5t},\; k = \pm e^{C}$$

- Assim a solução é

$$p = 900 + ke^{0.5t}$$

onde k é uma constante.

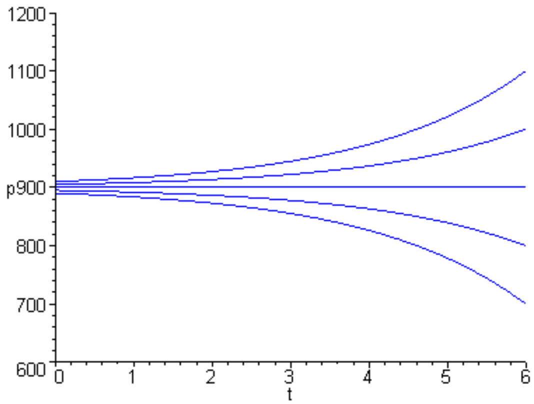


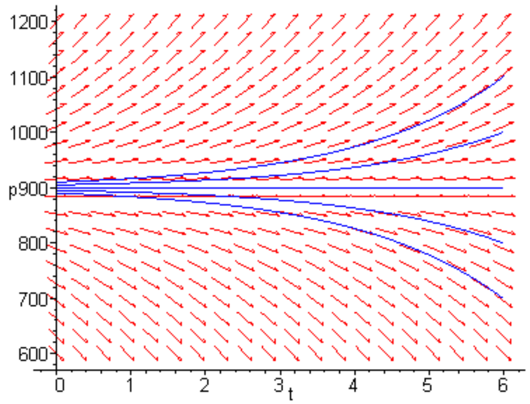
Capítulo 1.2:
Exemplo 1: Curvas integrais

- Assim nós temos infinitas soluções da nossa equação,

$$p' = 0.5p - 450 \quad \Rightarrow \quad p = 900 + ke^{0.5t},$$

sendo k é uma constante arbitrária.
- Os gráficos das soluções (curvas integrais) para diversos valores de k, e o campo de direções para a equação diferencial, são dados abaixo.
- Escolhendo k = 0, nós obtemos a solução de equilíbrio, quando for $k \neq 0$, as soluções diverge da solução do equilíbrio.





Capítulo 1.2:
Exemplo 1: Condições Iniciais (Valor Inicial)

- Uma equação diferencial tem freqüentemente infinitas soluções. Se um ponto na curva da solução for dado, como uma condição inicial, podemos determinar uma solução original.
- Na equação diferencial ratos/coruja, supondo que nós sabemos que a população dos ratos começa em 850. Então p(0) = 850, e

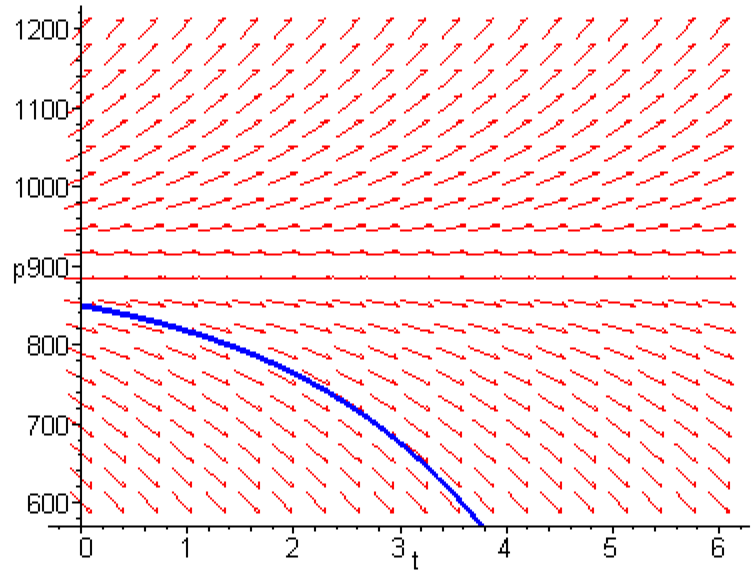
$$p(t) = 900 + ke^{0.5t}$$

$$p(0) = 850 = 900 + ke^{0}$$

$$-50 = k$$

Solução:

$$p(t) = 900 - 50e^{0.5t}$$



Capítulo 1.2:
Solução Geral da E.D.

- Para resolver a equação geral $y' = ay - b$
  nós usamos métodos do cálculo, como segue.

$$\frac{dy}{dt} = a\left(y - \frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{dy/dt}{y - b/a} = a \Rightarrow \int \frac{dy}{y - b/a} = \int a\,dt$$

$$\Rightarrow \ln\left|y - b/a\right| = at + C \Rightarrow \left|y - b/a\right| = e^{at+C}$$

$$\Rightarrow y - b/a = \pm e^{at} e^{C} \Rightarrow y = b/a + ke^{at},\; k = \pm e^{C}$$

- Assim a solução geral é

$$y = \frac{b}{a} + ke^{at}, \qquad \text{onde k é uma constante}$$

Capítulo 1.2:
Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

- A seguir, nós resolveremos o Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$y' = ay - b, \qquad y(0) = y_0$$

- Primeiro determinamos a solução da Equação Diferencial (E.D.)

$$y = b/a + ke^{at}$$

- Usando a condição inicial para determinar k, nós obtemos

$$y(0) = y_0 = \frac{b}{a} + ke^0 \quad \Rightarrow \quad k = y_0 - \frac{b}{a}$$

e daqui a solução do P.V.I. é

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at}$$

Capítulo 1.2:
Soluções de Equilíbrio

- Para encontrar a Solução de Equilibrio, faça $y' = 0$ e resolva em y:

$$y' = ay - b = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{b}{a}$$

- Dos casos anteriores, as Soluções são do tipo:

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at}$$

- Note o seguinte comportamento das soluções :
  - Se $\boldsymbol{y_0 = b/a}$, então $\boldsymbol{y}$ é constante, com $\boldsymbol{y(t) = b/a}$
  - Se $\boldsymbol{y_0 > b/a}$ e $\boldsymbol{a > 0}$, então $\boldsymbol{y}$ cresce exponencial sem limite
  - Se $\boldsymbol{y_0 > b/a}$ e $\boldsymbol{a < 0}$, então $\boldsymbol{y}$ decresce assintoticamente para $\boldsymbol{b/a}$
  - Se $\boldsymbol{y_0 < b/a}$ e $\boldsymbol{a > 0}$, então $\boldsymbol{y}$ decresce exponencial sem limite
  - Se $\boldsymbol{y_0 < b/a}$ e $\boldsymbol{a < 0}$, então $\boldsymbol{y}$ cresce assintoticamente para $\boldsymbol{b/a}$

Capítulo 1.2:
Exemplo 2: Equação da queda livre

- Recordar a equação do modelo da queda livre de um objeto de 10 kg, supondo um coeficiente da resistência do ar $\gamma = 2$ kg/sec: $dv/dt = 9.8 - 0.2v$
- Supor que o objeto está foi solto de 300m acima da terra.
  (a) Encontrar a velocidade em qualquer altura que no t.
  (b) Quanto tempo até que bata a terra e com que velocidade ele estará então?
- Para a parte (a), nós necessitamos resolver o P.V.I.

$$v' = 9.8 - 0.2v, \quad v(0) = 0$$

- usando o resultado anterior, nós temos

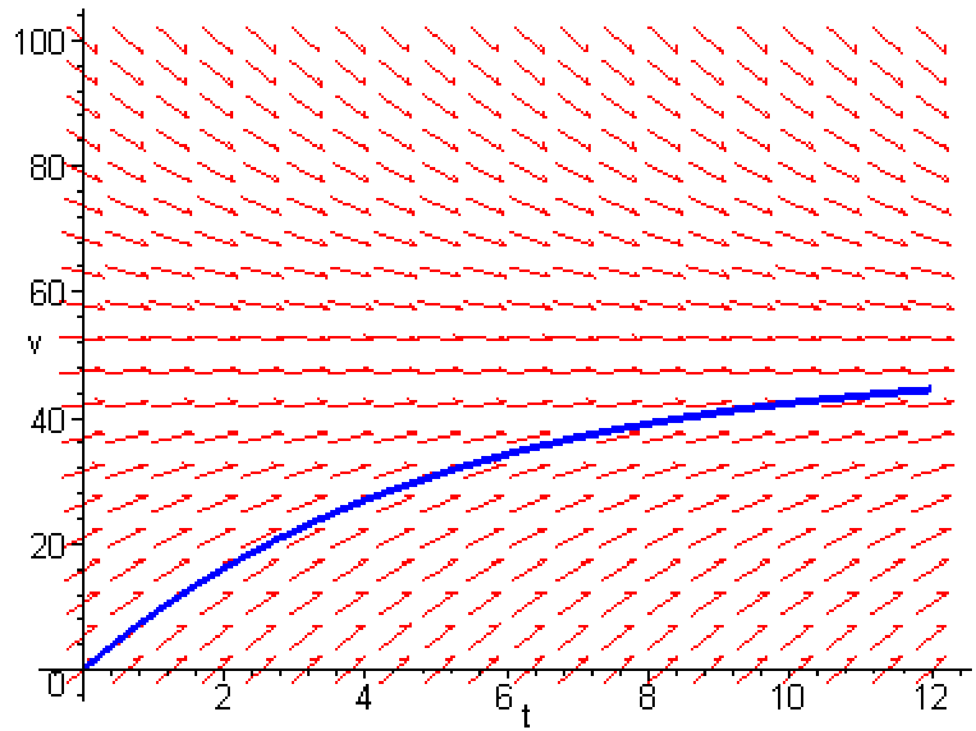
$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a}\right]e^{at} \;\Rightarrow\; v = \frac{9.8}{0.2} + \left[0 - \frac{9.8}{0.2}\right]e^{-.2t} \;\Rightarrow\; v = 49\left(1 - e^{-.2t}\right)$$

Capítulo 1.2:
Exemplo 2: Gráfico da Parte (a)

- O gráfico da solução encontrada na parte (a), junto com o campo de direções para a equação diferencial, é dado abaixo.

$$v' = 9.8 - 0.2v, \quad v(0) = 0$$

$$v = 49\left(1 - e^{-0.2t}\right)$$



Capítulo 1.2:
Exemplo 2
Parte (b): Tempo e Velocidade de Impacto

- Em seguida, dado que o objeto está caindo de 300m acima da terra, em quanto tempo cairá na terra, e como velocidade estará movendo-se no impacto?
- Solução: Seja $s(t)$ = distância do objeto em função do tempo t.

  Segue de nossa solução v (t) ,

$$s'(t) = v(t) = 49 - 49e^{-0.2t} \quad \Rightarrow \quad s(t) = 49t + 245e^{-0.2t} + C$$

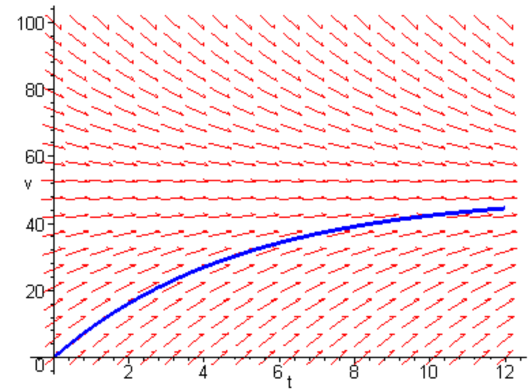
$$s(0) = 0 \Rightarrow \; C = -245 \qquad \Rightarrow \; s(t) = 49t + 245e^{-0.2t} - 245$$

- Seja T o tempo de impacto. Então

$$s(T) = 49T + 245e^{-0.2T} - 245 = 300$$

- Resolvendo, $T \cong 10.51$ sec, onde

$$v(10.51) = 49\left(1 - e^{-0.2(10.51)}\right) \approx 43.01\,\text{m/sec}$$



Capítulo 1.3:
Classificação das Equações Diferenciais

- A finalidade principal deste curso é discutir propriedades das soluções de equações diferenciais, e os métodos atuais de encontrar soluções ou de aproxima-las.
- Quando a função desconhecida, *y*, depender de uma única variável independente, *t*, somente as derivadas ordinárias aparecem na equação.
- Neste caso a equação é dita **<u>Equação Diferencial Ordinária</u>** (**EDO**). Exemplos:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.2v, \quad \frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Capítulo 1.3:
Equações Diferenciais Parciais

- Quando a função desconhecida depende de diversas variáveis independentes, as derivadas parciais aparecem na equação.
- Neste caso a equação é dita ser uma Equação Diferencial Parcial (E.D.P.).
- Exemplos:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad \text{(Equação do Calor)}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{(Equação da Onda)}$$

Capítulo 1.3:
Sistemas de Equações Diferenciais

- Uma outra classificação das equações diferenciais depende do número das funções desconhecidas que são envolvida.
- Se houver uma única função desconhecida a ser encontrada, uma equação é suficiente. Se houver duas ou mais funções desconhecidas, será necessário um sistema de equações.
- Por exemplo, as equações da predador-presa têm a seguinte formula

$$du/dt = au - \alpha uv$$

$$dv/dt = -cv + \gamma uv$$

onde $u(t)$ e $v(t)$ são as populações respectivas da presa e o predador. As constantes a, c, α, γ dependem da espécie particular que está sendo estudada .

Capítulo 1.3:
Ordem de Equações Diferenciais

- A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada que aparece na equação.

Exemplos:

$$y' + 3y = 0$$

$$y'' + 3y' - 2t = 0$$

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - \frac{d^2 y}{dt^2} + 1 = e^{2t}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = s\,\mathrm{int}$$

- Nós estaremos estudando as equações diferenciais em que a derivada mais elevada possa ser isolada :

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Capítulo 1.3:
Linear e Não-linear Equações Diferenciais

- Uma Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.)

$$F\left(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

é **linear** se *F* é linear nas variáveis

$$y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$$

- A forma geral de uma E.D.O. linear é

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t)$$

- Exemplos: Determine quais as equações abaixo são linear ou não-linear.

(1) $y' + 3y = 0$ (2) $y'' + 3e^y y' - 2t = 0$ (3) $y'' + 3y' - 2t^2 = 0$

(4) $\dfrac{d^4 y}{dt^4} - t\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 1 = t^2$ (5) $u_{xx} + uu_{yy} = \sin t$ (6) $u_{xx} + \sin(u)u_{yy} = \cos t$

Capítulo 1.3:
Solução das Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.)

- Uma Solução $\phi(t)$ de uma E.D.O.

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

- Satisfaz a equação:

$$\phi^{(n)}(t) = f\left(t, \phi, \phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n-1)}\right)$$

- Exemplos: Verifique as seguintes soluções da E.D.O.

$$y'' + y = 0; \quad y_1(t) = \text{sen}(t), \quad y_2(t) = -\cos(t), \quad y_3(t) = 2\,\text{sen}(t)$$

- Três perguntas importantes no estudo de equações diferenciais:
  - Há uma solução? (Existência)
  - Se houver uma solução, é única? (unicidade)
  - Se houver uma solução, **como nós a encontramos**?
    (**Solução analítica, aproximação numérica**, etc.)

Capítulo 1.4: Notas Históricas

- O estudo de equações diferenciais é uma parte significativa do desenvolvimento geral da matemática.
- Isaac Newton (1642-1727) nasceu na Inglaterra, e é conhecido pelo seu desenvolvimento do cálculo e das leis da física (mecânica), solução de série às EDOs, 1665 - 1690.
- Gottfried Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. É conhecido pelo seu desenvolvimento do cálculo (1684), notação para a derivada (dy/dx), do método da separação das variáveis (1691), métodos de primeira ordem de EDO (1694) .

Capítulo 1.4:
Os Bernoullis

- Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) eram ambos nascidos em Basel.
- Usaram o cálculo e as integrais na formula de equações diferenciais para resolver problemas dos mecânicos.
- Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, é conhecido pelo seu trabalho em equações diferenciais e em aplicações parciais, e as funções de Bessel.

Capítulo 1.4:
Leonard Euler (1707-1783)

- Leonard Euler (pronunciado "oiler"), foi levantado para Basel, e era o matemático o mais prolífico de toda os tempos. Seus trabalhos coletados enchem mais de 70 volumes.
- Formulou problemas de mecânica na língua matemática e desenvolveu métodos da solução. "Primeiro trabalho grande em que a análise é aplicada à ciência do movimento" (Lagrange).
- É conhecido também pelo seu trabalho na exatidão das EDOs de primeira ordem (1734), os fatores integrantes (1734), equações lineares com coeficientes constantes (1743), soluções por série às equações diferenciais (1750), os procedimentos numéricos (1768), a EDPs (1768), e o cálculo das variações (1768).

Capítulo 1.4:

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

- Lagrange nasceu em Turin, Italia. Era na maior parte autodidata no começo, e tornou-se professor de matemática aos 19 anos de idade.
- O trabalho mais famoso de Lagrange foi Analytical Mechanics (1788) em mecânica Newtoniana.
- Lagrange mostrou que a solução geral de um EDO homogênea linear de ordem n é uma combinação linear das n's soluções independentes (1762-65). Deu também um desenvolvimento completo da variação dos parâmetros (1774-75), e estudou EDPs e cálculo das variações.

Capítulo 1.4:

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

- Laplace nasceu em Normandia, França, e era proeminente nas mecânicas celestiais (1799-1825).
- A equação de Laplace em EDPs foi estudada extensivamente em relação à atração gravitacional.
- A transformada de Laplace recebeu o nome dele muito tempo depois.

Capítulo 1.4:
1800

- Nos fins de 1700s, muitos métodos elementares de resolver equações diferenciais ordinárias tinham sido descobertos.
- Nos anos de 1800s, o interesse era entorno de perguntas teóricas da existência e da unicidade, e nas expansões da série.
- As equações diferenciais parciais transformaram-se também um foco de estudo, enquanto seu papel na física matemática se tornou desobstruído.
- Criou-se uma classe de funções auxiliares chamadas Funções Especiais. Este grupo incluiu funções de Bessel, polinômios de Chebyshev, polinômios de Legendre, polinômios de Hermite, polinômios de Hankel.

Capítulo 1.4:
De 1900s – Atualidade

- Muitas equações diferenciais resistiram a solução por meios analíticos. Em 1900, apareceram os métodos numéricos eficazes de aproximação, mas a utilização era limitada pelo cálculo numérico.
- Nos últimos 50 anos, com o desenvolvimento dos computadores e dos algoritmos permitiram soluções numéricas exatas para muitas das equações diferenciais.
- Também, a criação de métodos de análise geométricos ou topológicos para as equações não-lineares ajudaram à compreensão qualitativa das equações diferenciais.
- Os computadores e os gráficos de computador permitiram um novo estudo das equações diferenciais não-lineares, tais como o caos, os fractais, etc.