

# Capítulo 3.1: Equações homogêneas lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

- ✦ Uma **equação diferencial ordinária de segunda ordem** tem a forma geral

$$y'' = f(t, y, y')$$

onde  $f$  é uma função dada.

- ✦ Esta equação é dita **linear** se  $f$  é linear em  $y$  e  $y'$ :

$$y'' = g(t) - p(t)y' - q(t)y$$

caso contrário dizemos que é **não linear**.

- ✦ Uma equação linear de segunda ordem aparece como

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$$

- ✦ Se  $G(t) = 0$  para todo  $t$ , então esta equação é dita **homogênea**. caso contrário dizemos que é **não homogênea**.

# Capítulo 3.1:

## Equações Homogêneas, Valores Iniciais

- ✦ Em particular, as de coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

O caso com coeficientes variáveis será vista mais adiante.

- ✦ Condição Inicial é dada da seguinte forma

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

- ✦ Portanto a solução passa por  $(t_0, y_0)$ , e a inclinação da solução em  $(t_0, y_0)$  é igual a  $y_0'$ .

# Capítulo 3.1:

## Exemplo 1

### Infinidades de Soluções

- ✦ Considere a EDO de 2ª ordem

$$y'' - y = 0$$

- ✦ As duas soluções desta equação são

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{-t}$$

- ✦ Outras soluções são

$$y_3(t) = 3e^t, \quad y_4(t) = 5e^{-t}, \quad y_5(t) = 3e^t + 5e^{-t}$$

- ✦ Baseado nesta observação, nós vimos que existem uma infinidades de soluções e são da forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- ✦ Resumidamente todas as soluções da EDO acima podem ser dadas desta forma.

# Capítulo 3.1:

## Exemplo 1

### Condições Iniciais

- ✦ Agora considere o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI) para nossa equação:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

- ✦ Nos podemos encontrar uma solução geral da seguinte forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- ✦ Usando as condições iniciais,

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = c_1 + c_2 = 3 \\ y'(0) = c_1 - c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 2, \quad c_2 = 1$$

- ✦ temos

$$y(t) = 2e^t + e^{-t}$$

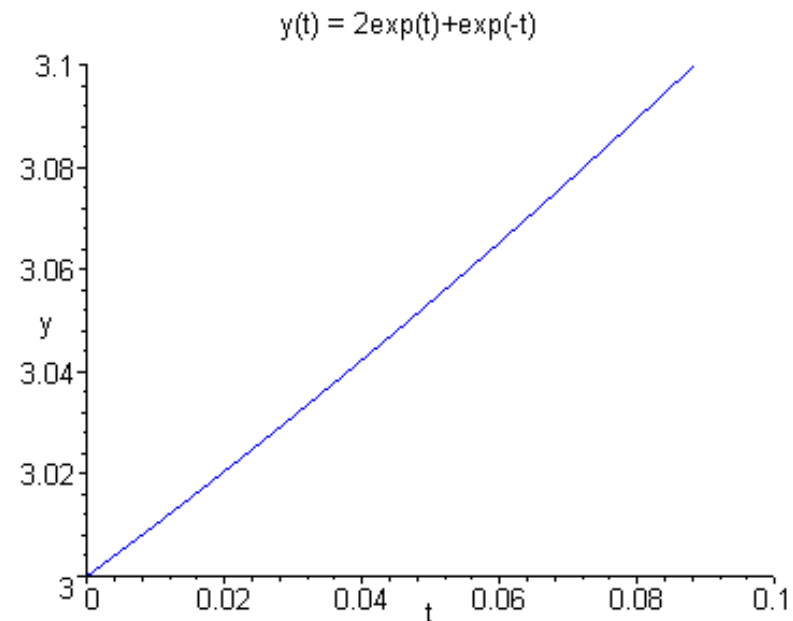
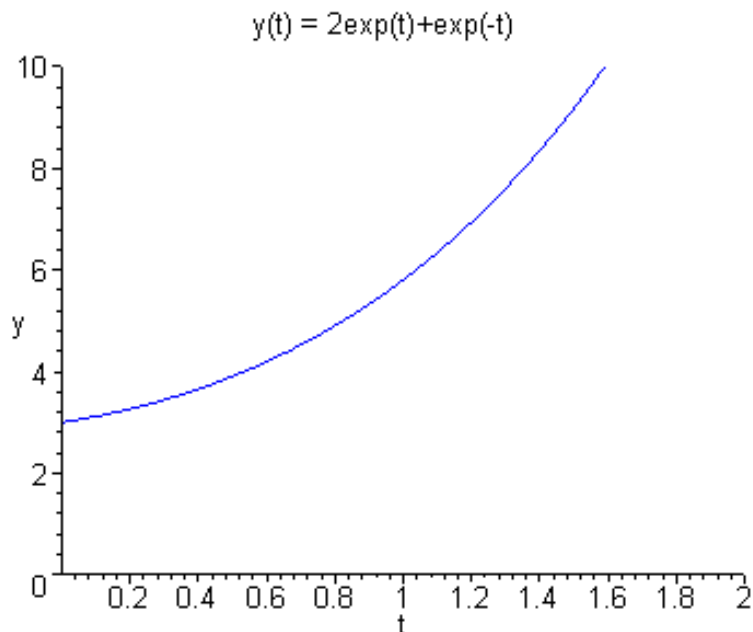
# Capítulo 3.1:

## Exemplo 1: Gráfico da Solução

✦ O PVI e a solução são

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1 \Rightarrow y(t) = 2e^t + e^{-t}$$

✦ O gráfico da solução é dado abaixo. O gráfico da direita sugere que ambas as condições são satisfeita.



## Capítulo 3.1: Equação Característica

- ✦ Para resolver uma equação de 2ª ordem com coeficientes constantes,  $ay'' + by' + cy = 0$ ,
- ✦ começamos assumindo uma solução da forma  $y = e^{rt}$ .
- ✦ Substituindo-a na equação diferencial, obtemos:

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Simplificando,

$$e^{rt} (ar^2 + br + c) = 0$$

e assim

$$ar^2 + br + c = 0$$

- ✦ Esta última equação é chamada **equação característica** (**polinômio característico**) da equação diferencial.

# Capítulo 3.1:

## Solução Geral

- ✦ Usando a formula quadrática na **equação característica**

$$ar^2 + br + c = 0,$$

obtemos duas soluções,  $r_1$  e  $r_2$ .

- ✦ Existem três possibilidades:

- As Raízes  $r_1, r_2$  são reais e  $r_1 \neq r_2$ .
- As Raízes  $r_1, r_2$  são reais e  $r_1 = r_2$ .
- As Raízes  $r_1, r_2$  são complexas.

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ✦ Por enquanto, vamos assumir que  $r_1, r_2$  são reais e  $r_1 \neq r_2$ .

- ✦ Neste caso, a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

# Capítulo 3.1:

## Condições Iniciais

✦ Para o PVI

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0,$$

usaremos a solução geral

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

usando as condições iniciais para encontrar  $c_1$  e  $c_2$ . Isto é,

$$\left. \begin{array}{l} c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y'_0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \quad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}$$

✦ Assumindo  $r_1 \neq r_2$ , segue que uma solução da forma  $y = e^{rt}$  para o PVI acima sempre existirá, para qualquer conjunto de condições iniciais.



# Capítulo 3.1:

## Exemplo 2

✦ Considere o PVI

$$y'' + y' - 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

✦ Tomando a solução exponencial e obtendo a E.C.:

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + r - 12 = 0 \Leftrightarrow (r + 4)(r - 3) = 0$$

✦ Resolvendo a E.C. obtemos duas soluções,  $r_1 = -4$  e  $r_2 = 3$

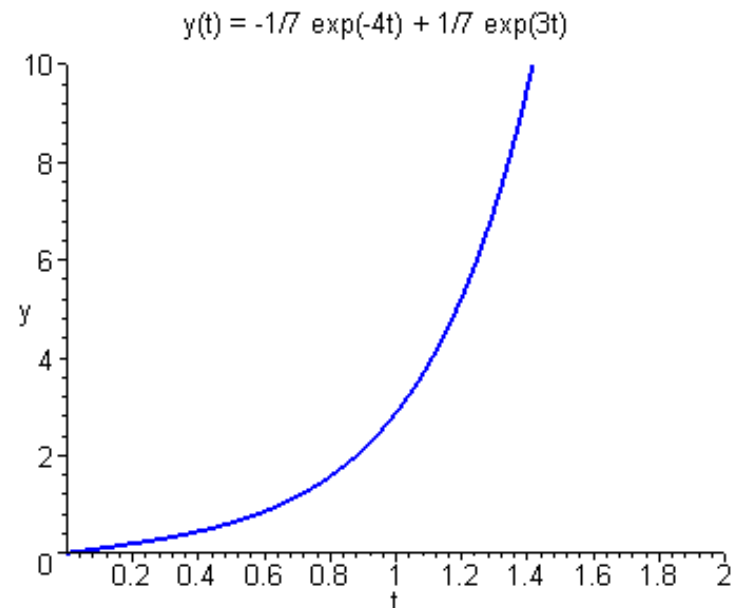
✦ A solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$$

✦ Usando as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ -4c_1 + 3c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \frac{-1}{7}, \quad c_2 = \frac{1}{7}$$

✦ Temos  $y(t) = \frac{-1}{7} e^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t}$



# Capítulo 3.1:

## Exemplo 3

✦ Considere o PVI

$$2y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

✦ Então

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow 2r^2 + 3r = 0 \Leftrightarrow r(2r + 3) = 0$$

✦ Obtemos duas soluções,  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -3/2$

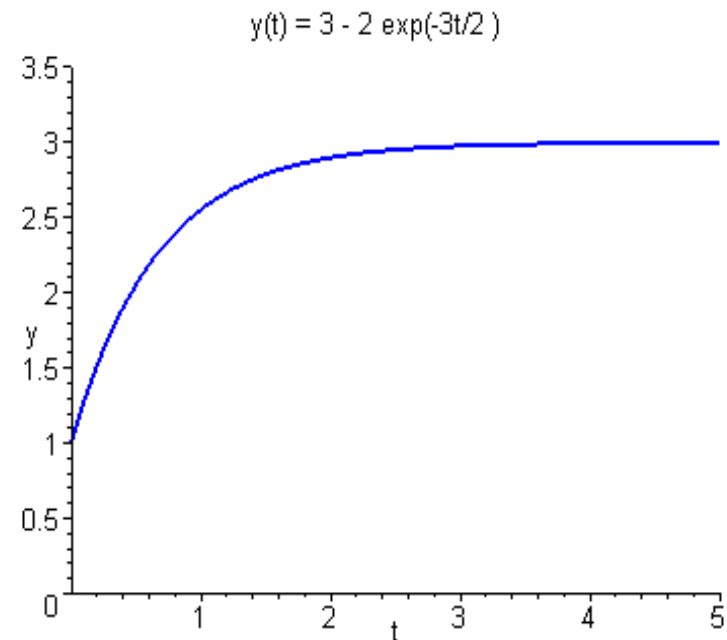
✦ A solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-3t/2} = c_1 + c_2 e^{-3t/2}$$

✦ Usando as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ -\frac{3c_2}{2} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 3, \quad c_2 = -2$$

✦ Temos  $y(t) = 3 - 2e^{-3t/2}$



## Capítulo 3.1: Exemplo 4: PVI

✦ Considere o PVI

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

✦ Então

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow (r + 2)(r + 3) = 0$$

✦ Obtemos duas soluções,  $r_1 = -2$  e  $r_2 = -3$

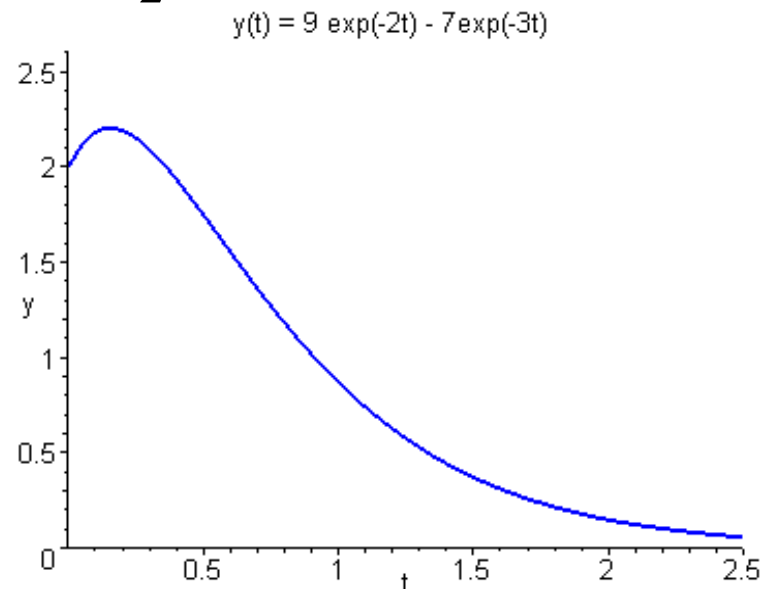
✦ A solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

✦ Usando as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_1 - 3c_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 9, c_2 = -7$$

✦ Temos  $y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$



## Capítulo 3.1:

### Exemplo 4: Encontrando o Valor Máximo

- ✦ Encontrar o valor máximo alcançado pela solução.

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

$$y'(t) = -18e^{-2t} + 21e^{-3t} = 0$$

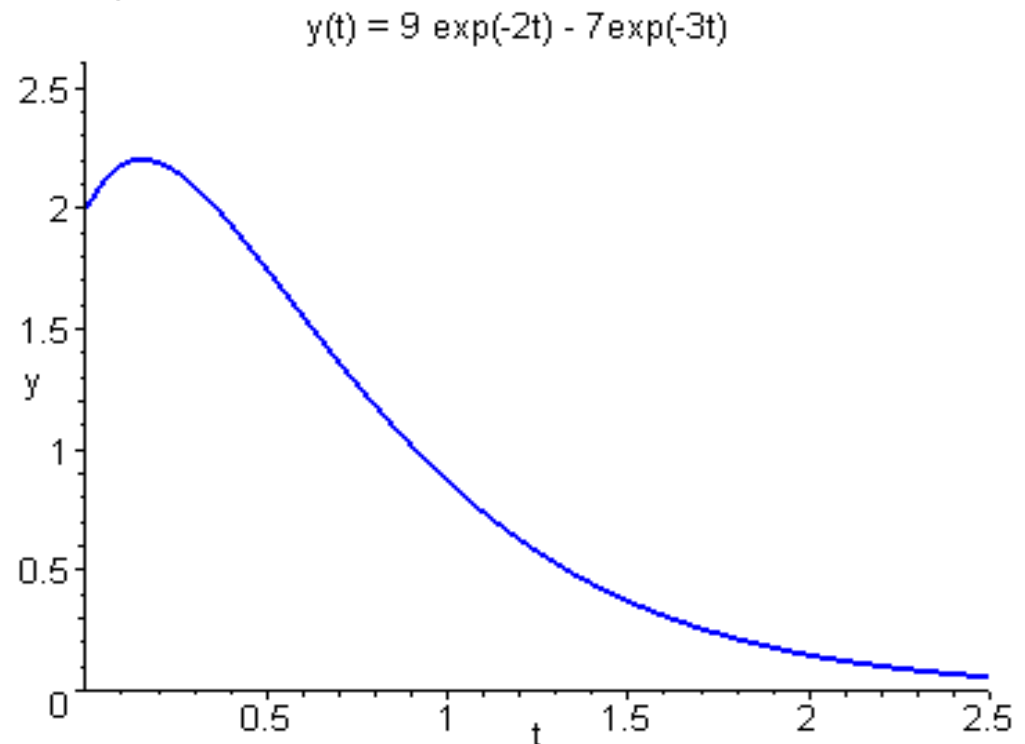
$$6e^{-2t} = 7e^{-3t}$$

$$e^t = 7/6$$

$$t = \ln(7/6)$$

$$t \approx 0.1542$$

$$y \approx 2.204$$



## Capítulo 3.2: Soluções Fundamentais de Equações Lineares Homogêneas

✦ Sejam  $p, q$  funções contínuas no intervalo  $I = (\alpha, \beta)$ , o qual poderá ser infinito.

Para  $y$  – função três vezes diferenciável em  $I$ , definimos o operador diferencial  $L$  por

$$L[y] = y'' + p y' + q y$$

✦ Note que  $L[y]$  é uma função em  $I$ , com valor de saída

$$L[y](t) = y''(t) + p(t) y'(t) + q(t) y(t)$$

✦ Por exemplo,

$$p(t) = t^2, \quad q(t) = e^{2t}, \quad y(t) = \sin(t), \quad I = (0, 2\pi)$$

$$L[y](t) = -\sin(t) + t^2 \cos(t) + 2e^{2t} \sin(t)$$

## Capítulo 3.2:

### Notação do Operador Diferencial

- ✦ Seja equação homogênea linear de 2ª ordem  $L[y](t) = 0$ , junto com condições iniciais como indicado abaixo:

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1$$

- ✦ Existe solução para este problema de valor inicial?  
Em caso afirmativo, se é única?
- ✦ Também, gostaríamos de saber sobre a forma e a estrutura das soluções, pois, podem ser úteis na hora de encontrar soluções para os problemas particulares.
- ✦ Estas perguntas são respondidas nos teoremas a seguir .

## Capítulo 3.2:

### Teorema 3.2.1 (de existência e unicidade)

✦ Considere o PVI

$$y'' + p(t) y' + q(t) y = g(t)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

✦ onde  $p$ ,  $q$ , e  $g$  são funções contínuas no intervalo aberto  $I$  que contém  $t_0$ . Então **existe** uma **única** solução  $y = \phi(t)$  em  $I$ .

## Capítulo 3.2: $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$

### Exemplo 1 $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$

- ✦ Considere a EDO 2ª ordem linear com PVI

$$y'' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1$$

- ✦ Na seção 3.1, nós mostramos que este PVI tem a seguinte solução:

$$y(t) = 2e^t + e^{-t}$$

- ✦ Note que  $p(t) = 0, q(t) = -1, g(t) = 0$  elas são contínuas em  $(-\infty, \infty)$ , e a solução  $y$  está bem definida e é duas vezes diferenciável em  $(-\infty, \infty)$ .



## Capítulo 3.2:

### Exemplo 2

- ✦ Considere a EDO de 2ª ordem linear com PVI

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

onde  $p, q$  são funções contínuas no intervalo aberto  $I$  que contém  $0$ .

- ✦ Note que  $y = 0$  é uma solução para este problema homogêneo de valor inicial.
- ✦ Desde que as hipóteses do Teorema 3.2.1 são satisfeitas, segue que  $y = 0$  é a única solução deste problema.

## Capítulo 3.2:

### Exemplo 3

- ✦ Determinar o maior intervalo em que dado o valor inicial, solução do problema **existe** e é **única** e ainda é **duas vezes diferenciável**.

$$(t+1)y'' - (\cos t)y' + 3y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✦ Primeiramente pôr a equação diferencial na formula padrão:

$$y'' - \frac{\cos t}{t+1} y' + \frac{3}{t+1} y = \frac{1}{t+1}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✦ O maior intervalo que contem o ponto  $t = 0$  em que os coeficiente da função são contínuos é  $(-1, \infty)$ .
- ✦ Segue do Teorema 3.2.1 que o maior intervalo em que este problema de valor inicial terá uma solução duas vezes diferenciável é também  $(-1, \infty)$ .

## Capítulo 3.2:

### Teorema 3.2.2 (Princípio da Superposição)

- ✦ Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

então a combinação linear delas  $c_1y_1 + c_2y_2$  é também uma solução, para todas as constantes  $c_1$  e  $c_2$  reais.

- ✦ Para provar este Teorema, substitua  $c_1y_1 + c_2y_2$  no lugar de  $y$  na equação abaixo, e use o fato de que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções e  $L[y]$  é linear.

$$L[y_1] = 0 \text{ e } L[y_2] = 0 \Rightarrow L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0$$

- ✦ Assim para todas as duas soluções  $y_1$  e  $y_2$ , nós podemos construir uma família infinita de soluções, para cada  $y = c_1y_1 + c_2y_2$ .
- ✦ Pode todas as soluções ser escrita desta maneira, ou têm alguma outra solução completamente diferente? Para responder a esta pergunta, nós usaremos o **determinante Wronskiano**.

## Capítulo 3.2: O Determinante Wronskiano

- ✦ Suponha que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções para a equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- ✦ Pelo Teorema 3.2.2, nos sabemos que  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  é uma solução desta equação.

- ✦ O próximo passo é encontrar os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  satisfazem as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

- ✦ Para isso, nós necessitamos resolver as seguintes equações:

$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0$$

$$c_1y'_1(t_0) + c_2y'_2(t_0) = y'_0$$

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$

$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'$$

## Capítulo 3.2: O Determinante Wronskiano

✦ Resolvendo as equações, nos obtemos

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

$$c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

✦ Em termos de determinantes:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}$$

## Capítulo 3.2: O Determinante Wronskiano

- ✦ Para que estas fórmulas sejam válidas, o determinante  $W$  no denominador não pode se anular:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y'_2(t_0) - y'_1(t_0)y_2(t_0)$$

- ✦  $W$  é chamado de **Determinante Wronskiano**, ou simplesmente de, o **Wronskiano** das soluções  $y_1$  e  $y_2$ . Nós usaremos às vezes a notação

$$W(y_1, y_2)(t_0)$$

## Capítulo 3.2:

### Teorema 3.2.3

✦ Suponha que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1)$$

e que o Wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

é não nulo no ponto  $t_0$  onde as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \quad (2)$$

são definidas. Então existe uma escolha das constantes  $c_1, c_2$  para que  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  seja uma solução da equação diferencial (1) e das condições iniciais (2).

## Capítulo 3.2:

### Exemplo 4

✦ Observe o seguinte PVI e sua solução:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 2e^t + e^{-t}$$

✦ Note que as duas funções exponenciais são soluções da equação diferencial:

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}$$

✦ O Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2$$

✦ Como  $W \neq 0$  para todo  $t$ , a combinação linear de  $y_1$  e  $y_2$  pode ser usada para construir a solução do PVI para qualquer condição inicial  $t_0$ .

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$



## Capítulo 3.2:

### Teorema 3.2.4 (Solução Fundamental)

✦ Suponha que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Se existe um ponto  $t_0$  tal que  $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ , então a família de soluções  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  com coeficientes arbitrários  $c_1, c_2$  incluem todas as soluções da equação diferencial.

✦ A expressão  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  é chamada de **solução geral** da equação diferencial acima, e neste caso  $y_1$  e  $y_2$  formam o chamado **Conjunto Fundamental das Soluções** para a equação diferencial.

## Capítulo 3.2: Exemplo 5

✦ Para a equação abaixo, temos duas soluções indicadas:

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}$$

✦ O Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2 \neq 0 \text{ para todo } t.$$

✦ Assim  $y_1$  e  $y_2$  formam o Conjunto Fundamental das Soluções da equação diferencial acima, e podemos usá-las para construir todas as suas soluções.

✦ A solução Geral é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

## Capítulo 3.2:

### Exemplo 6

- ✦ Considere uma equação linear de 2ª ordem:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- ✦ Suponha que as funções abaixo são soluções desta equação:

$$y_1 = e^{r_1 t}, y_2 = e^{r_2 t}, r_1 \neq r_2$$

- ✦ O Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} \neq 0 \text{ para todo } t.$$

- ✦ Assim  $y_1$  e  $y_2$  formam o Conjunto Fundamental das Soluções da EDO, e podem ser usadas para construir todas as soluções.

- ✦ A solução Geral é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

## Capítulo 3.2:

### Exemplo 7: Soluções fundamentais 1

- ✦ Considere a seguinte equação diferencial:

$$2t^2 y'' + 3t y' - y = 0, \quad t > 0$$

- ✦ Mostre que as soluções abaixo são soluções fundamentais:

$$y_1 = t^{1/2}, \quad y_2 = t^{-1}$$

- ✦ Para mostrar isso, primeiro substitua  $y_1$  na equação:

$$2t^2 \left( \frac{-t^{-3/2}}{4} \right) + 3t \left( \frac{t^{-1/2}}{2} \right) - t^{1/2} = \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 \right) t^{1/2} = 0$$

- ✦ Assim  $y_1$  é uma solução da equação diferencial.

- ✦ Similarmente,  $y_2$  também é uma solução:

$$2t^2 (2t^{-3}) + 3t (-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0$$

## Capítulo 3.2:

### Exemplo 7: Soluções fundamentais 2

$$y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1}$$

- ✦ Para mostrar que  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções, vamos calcular o Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$ :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-3/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

- ✦ Desde que  $W \neq 0$  para  $t > 0$ ,  $y_1, y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial

$$2t^2 y'' + 3t y' - y = 0, \quad t > 0$$

## Capítulo 3.2:

### Teorema 3.2.5: Existencia do Conjunto Fundamental de Soluções (inútil)

- ✦ Considere a equação diferencial abaixo, onde os coeficientes  $p$  e  $q$  são contínuos em algum intervalo aberto  $I$ :

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- ✦ Seja  $t_0$  um ponto em  $I$ ,  $y_1$  e  $y_2$  soluções da equação diferencial com  $y_1$  e  $y_2$  satisfazendo

$$y_1(t_0) = 1, \quad y_1'(t_0) = 0$$

$$y_2(t_0) = 0, \quad y_2'(t_0) = 1$$

- ✦ Então  $y_1, y_2$  formam o conjunto fundamental das soluções para a dada equação diferencial.

## Capítulo 3.2:

### Exemplo 7: Teorema 3.2.5 (1 de 3)

- ✳ Encontrar o conjunto fundamental especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial e o ponto inicial

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

- ✳ É fácil ver que

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}$$

são soluções fundamentais, pois  $W(y_1, y_2)(t_0) = -2 \neq 0$ .

- ✳ Mas estas duas soluções não satisfazem às condições iniciais indicadas no Teorema 3.2.5.

**Elas formam o conjunto fundamental das soluções ????**

- ✳ Sejam  $y_3$  e  $y_4$  as soluções fundamentais do Teorema 3.2.5.

$$y_3(0) = 1, \quad y_3'(0) = 0; \quad y_4(0) = 0, \quad y_4'(0) = 1$$

## Capítulo 3.2:

### Exemplo 7: Solução Geral

✦ Desde que  $y_1$  e  $y_2$  formam o conjunto fundamental de soluções,

$$y_3 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y_3(0) = 1, \quad y_3'(0) = 0$$

$$y_4 = d_1 e^t + d_2 e^{-t}, \quad y_4(0) = 0, \quad y_4'(0) = 1$$

✦ Resolvendo para cada equação, obtemos

$$y_3(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} = \cosh(t), \quad y_4(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} = \sinh(t)$$

✦ O Wronskiano de  $y_3$  e  $y_4$  é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \neq 0$$

✦ Assim  $y_3, y_4$  formam o conjunto fundamental de soluções indicado no Teorema 3.2.5, com solução geral neste caso

$$y(t) = k_1 \cosh(t) + k_2 \sinh(t)$$



## Capítulo 3.2:

### Exemplo 7: Vários Conjuntos Fundamentais de Soluções

✦ Portanto

$$S_1 = \{e^t, e^{-t}\}, \quad S_2 = \{\cosh t, \sinh t\}$$

ambos formam o conjunto fundamental de soluções para a EDO e o ponto inicial

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

✦ Em geral, uma equação diferencial pode ter uma infinidade de diferentes conjuntos fundamentais de soluções. Geralmente, nós escolhemos aquele que é o mais conveniente ou útil.

## Capítulo 3.2: Resumo

- ✦ Para encontrar uma solução geral de uma equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad \alpha < t < \beta$$

primeiramente encontramos duas soluções  $y_1$  e  $y_2$ .

- ✦ Certificar-se então que há um ponto  $t_0$  em algum intervalo tal que  $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ .

- ✦ Segue que  $y_1$  e  $y_2$  formam o conjunto fundamental de soluções para a equação, com solução geral  $y = c_1y_1 + c_2y_2$ .

- ✦ Se condições iniciais são dadas em um ponto  $t_0$  no intervalo onde  $W \neq 0$ , então  $c_1$  e  $c_2$  podem ser escolhidas de modo que satisfaçam as condições iniciais.

## Capítulo 3.3: Independência Linear e o Wronskiano

- ✦ Duas funções  $f$  e  $g$  são **Linearmente Dependente (LD)** se existe constantes  $c_1$  e  $c_2$ , não nulas simultaneamente, tal que

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

para todo  $t$  em  $I$ . Note que isto se reduz a determinar se  $f$  e  $g$  são múltiplas uma da outra.

- ✦ Se a única solução a esta equação for  $c_1 = c_2 = 0$ , então  $f$  e  $g$  são **Linearmente Independente(LI)**.

- ✦ Por exemplo, Sejam  $f(x) = \sin 2x$  e  $g(x) = \sin x \cdot \cos x$ , e considerando a combinação linear

$$c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$$

Esta equação é satisfeita se nós escolhermos  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -2$ , e daqui  $f$  e  $g$  são Linearmente Dependentes (LD).

## Capítulo 3.3:

### Soluções para Equações de Sistemas 2 x 2

✦ Quando resolvemos

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a$$

$$c_1y_1 + c_2y_2 = b$$

para  $c_1$  e  $c_2$ , pode ser mostrado que

$$c_1 = \frac{ay_2 - bx_2}{x_1y_2 - y_1x_2} = \frac{ay_2 - bx_2}{D},$$

$$c_2 = \frac{-ay_1 + bx_1}{x_1y_2 - y_1x_2} = \frac{-ay_1 + bx_1}{D}, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

✦ Note que se  $a = b = 0$ , então a única solução deste sistema de equações é  $c_1 = c_2 = 0$ , desde que  $D \neq 0$ .

## Capítulo 3.3:

### Exemplo 1: Independência Linear

- ✦ Mostrar que as seguintes funções são linear independentes em todo o intervalo :

$$f(t) = e^t, \quad g(t) = e^{-t}$$

- ✦ Sejam  $c_1$  e  $c_2$  escalares, e suponha

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

para todo  $t$  em um intervalo arbitrário  $(\alpha, \beta)$ .

- ✦ Queremos verificar se  $c_1 = c_2 = 0$ .

Escolha  $t_0$  e  $t_1$  em  $(\alpha, \beta)$ :  $t_0 \neq t_1$ . Então

$$c_1 e^{t_0} + c_2 e^{-t_0} = 0$$

$$c_1 e^{t_1} + c_2 e^{-t_1} = 0$$

## Capítulo 3.3:

### Exemplo 1: Independência Linear

✦ A solução do nosso sistema de equações

$$c_1 e^{t_0} + c_2 e^{-t_0} = 0$$

$$c_1 e^{t_1} + c_2 e^{-t_1} = 0$$

será  $c_1 = c_2 = 0$ , se provarmos que o determinante  $D$  é não nulo:

$$D = \begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{-t_0} \\ e^{t_1} & e^{-t_1} \end{vmatrix} = e^{t_0} e^{-t_1} - e^{-t_0} e^{t_1} = e^{t_0-t_1} - e^{t_1-t_0}$$

✦ Então

$$D = 0 \iff e^{t_0-t_1} = e^{t_1-t_0} \iff e^{t_0-t_1} = \frac{1}{e^{t_0-t_1}} \iff \left(e^{t_0-t_1}\right)^2 = 1$$

$$\iff e^{t_0-t_1} = 1 \iff t_0 = t_1$$

✦ Assim sendo  $t_0 \neq t_1$ , significa que  $D \neq 0$ , e portanto  $f$  e  $g$  são Linearmente Independentes (LI)

## Capítulo 3.3:

### Teorema 3.3.1

- ✦ Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis em um intervalo aberto  $I$ , se  $W(f, g)(t_0) \neq 0$  em algum ponto  $t_0$  em  $I$ , então  $f$  e  $g$  são linearmente independentes em  $I$ .  
**Além disso**, se  $f$  e  $g$  são linearmente dependentes em  $I$ , então  $W(f, g)(t) = 0$  para todo  $t$  em  $I$ .

- ✦ Prova(esboço): Sejam  $c_1$  e  $c_2$  escalares, e suponha

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

- ✦ Para todo  $t$  em  $I$ . Em particular, quando  $t = t_0$  nos temos

$$c_1 f(t_0) + c_2 g(t_0) = 0$$

$$c_1 f'(t_0) + c_2 g'(t_0) = 0$$

- ✦ Sendo  $W(f, g)(t_0) \neq 0$ , segue que  $c_1 = c_2 = 0$ , e assim  $f$  e  $g$  são LI.

## Capítulo 3.3:

### Teorema 3.3.2 (Teorema de Abel)

✦ Suponha que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

onde  $p$  e  $q$  são funções contínuas em algum intervalo aberto  $I$ .

Então  $W(y_1, y_2)(t)$  é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}$$

onde  $c$  é uma constante que depende de  $y_1$  e  $y_2$  mas não de  $t$ .

✦ Note que  $W(y_1, y_2)(t)$  ou é zero para todo  $t$  em  $I$  (se  $c = 0$ ) ou nunca se anula em  $I$  (se  $c \neq 0$ ).

✦ Idéia da Dem.:  $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ ;  $W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$ .



## Capítulo 3.3:

### Exemplo 2: Wronskiano e Teorema de Abel

- ✦ Observe a seguinte equação e suas duas soluções:

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}$$

- ✦ O Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2 \neq 0 \text{ para todo } t.$$

- ✦ Assim  $y_1$  e  $y_2$  são Linearmente Independentes em qualquer intervalo  $I$ , pelo Teorema 3.3.1. Agora compare  $W$  com o Teorema de Abel:

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 0dt} = c$$

- ✦  $c$  é o Wronskiano em algum tempo, por exemplo  $t=0$ .

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 1(-1) - (-1)1 = -2$$

## Capítulo 3.3:

### Teorema 3.3.3

✦ Seja  $y_1$  e  $y_2$  soluções para a equação abaixo, onde  $p$  e  $q$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ :

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

**Então**  $y_1$  e  $y_2$  são LD em  $I$ , se e somente se,  $W(y_1, y_2)(t) = 0$   
para todo  $t$  em  $I$ .

Equivalentemente,

$y_1$  e  $y_2$  são LI em  $I$ , se e somente se,  $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$   
para todo  $t$  em  $I$ .

# Capítulo 3.3:

## Resumo

✦ Sejam  $y_1$  e  $y_2$  soluções de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

onde  $p$  e  $q$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ .

✦ Então as seguintes afirmações são equivalentes :

- As funções  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções  $I$ .
- As funções  $y_1$  e  $y_2$  são Linearmente Independente em  $I$ .
- $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$  para algum  $t_0$  em  $I$ .
- $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$  para todo  $t$  em  $I$ .

# Capítulo 3.3:

## Notas de Algebra Linear

✦ Seja  $V$  o conjunto

$$V = \{y : y'' + p(t) y' + q(t) y = 0, t \in (\alpha, \beta)\}$$

Então  $V$  é um espaço vetorial de dimensão dois, com uma base formada pelo conjunto fundamental de  $y_1$  e  $y_2$ .

✦ Por exemplo, o espaço solução  $V$  para a equação diferencial

$$y'' - y = 0$$

tem como bases

$$S_1 = \{e^t, e^{-t}\}, \quad S_2 = \{\cosh t, \sinh t\}$$

com

$$V = \text{Espaço } S_1 = \text{Espaço } S_2$$

## Capítulo 3.4:

# Raízes Complexas da Equação Característica

✦ Retomando a discussão da equação

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais.

✦ Assumindo soluções exponenciais dada da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$$

✦ A fórmula quadrática(ou fatoração) fornece duas soluções,  $r_1$  e  $r_2$ :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

✦ Se  $b^2 - 4ac < 0$ , temos raízes complexas:  $r_1 = \lambda + i\mu$ ,  $r_2 = \lambda - i\mu$

✦ Assim

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t}, \quad y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t}$$

# Capítulo 3.4:

## Formula de Euler:

### Soluções Avaliadas nos Complexos

✦ Substituindo na serie de Taylor de  $e^t$ , obtemos **fórmula de Euler**:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!} = \cos t + i \sin t$$

✦ Generalizando a fórmula de Euler, obtemos

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t$$

✦ Então

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t} = e^{\lambda t} [\cos \mu t + i \sin \mu t] = e^{\lambda t} \cos \mu t + i e^{\lambda t} \sin \mu t$$

✦ Portanto

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} \cos \mu t + i e^{\lambda t} \sin \mu t$$

$$y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t} = e^{\lambda t} \cos \mu t - i e^{\lambda t} \sin \mu t$$

## Capítulo 3.4:

### Soluções Avaliadas nos Reais

- ✦ Nossas duas soluções são funções avaliadas nos complexo:

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t + ie^{\lambda t} \sin \mu t$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t - ie^{\lambda t} \sin \mu t$$

- ✦ Precisamos de soluções reais!!!!

- ✦ Para conseguir isto, recordemos que as combinações lineares das soluções são também soluções :

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{\lambda t} \cos \mu t$$

$$y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{\lambda t} \sin \mu t$$

- ✦ Ignorando as constantes, nós obtemos as duas soluções

$$y_3(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad y_4(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t$$

## Capítulo 3.4:

### Soluções Avaliadas nos Reais: O Wronskiano

✦ Temos as seguintes funções avaliadas nos reais:

$$y_3(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad y_4(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t$$

✦ Verificando o Wronskiano, obtemos

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^{\lambda t} \cos \mu t & e^{\lambda t} \sin \mu t \\ e^{\lambda t} (\lambda \cos \mu t - \mu \sin \mu t) & e^{\lambda t} (\lambda \sin \mu t + \mu \cos \mu t) \end{vmatrix} \\ &= \mu e^{2\lambda t} \neq 0 \end{aligned}$$

✦ Assim  $y_3$  e  $y_4$  formam o conjunto fundamental de soluções para nossa EDO, e a solução geral pode ser dada como

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t$$



## Capítulo 3.4: Exemplo 1

✦ Considere a equação

$$y'' + y' + y = 0$$

✦ Então

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

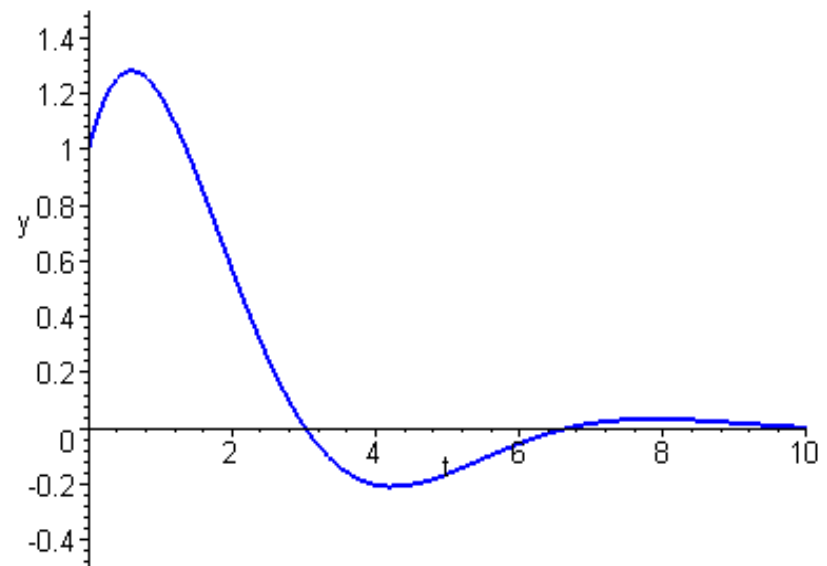
✦ Portanto

$$\lambda = -1/2, \mu = \sqrt{3}/2$$

e assim a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + c_2 e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$$

$$y(t) = \exp(-t/2) \cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3} \exp(-t/2) \sin(\sqrt{3}t/2)$$



## Capítulo 3.4: Exemplo 2

✦ Considere a equação

$$y'' + 4y = 0$$

✦ Então

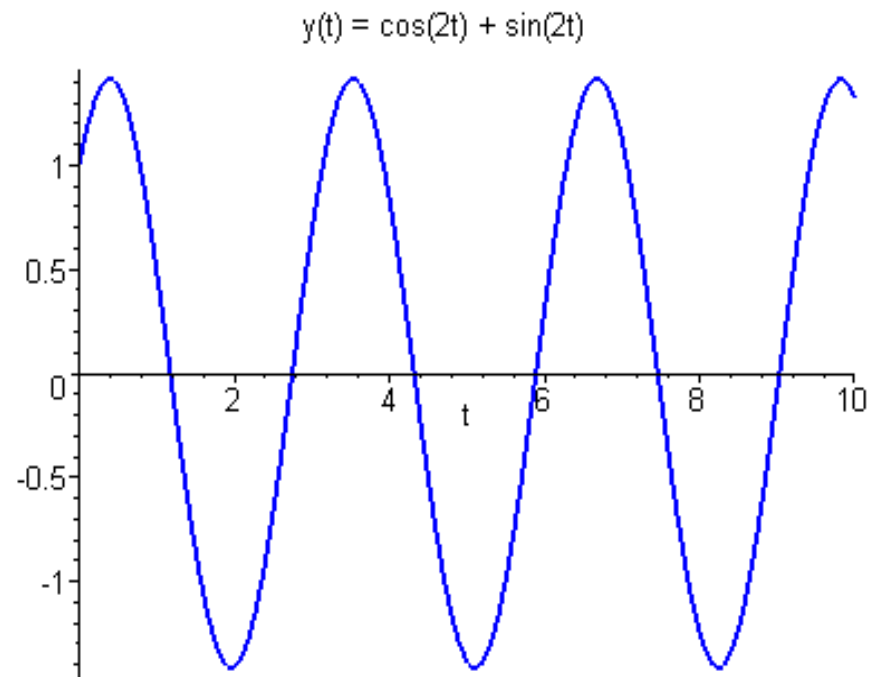
$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$$

✦ Portanto

$$\lambda = 0, \mu = 2$$

e assim a solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$



# Capítulo 3.4:

## Exemplo 3

✦ Considere a equação

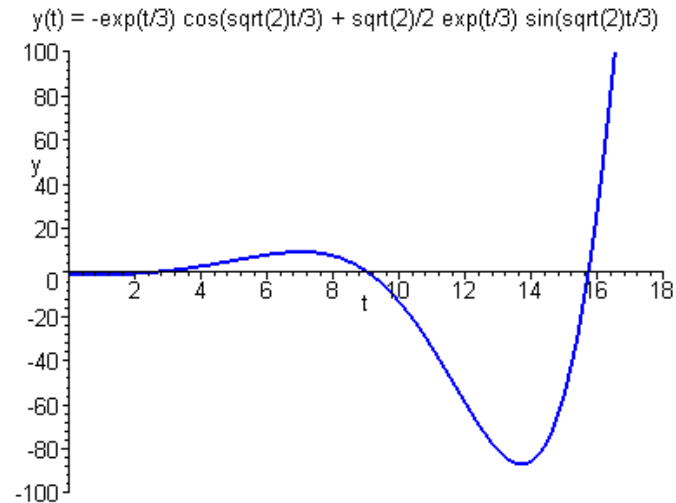
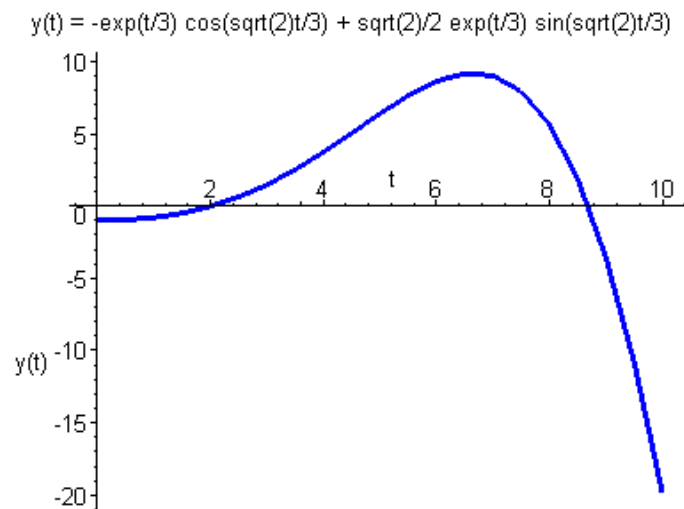
$$3y'' - 2y' + y = 0$$

✦ Então

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow 3r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

✦ Portanto a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{t/3} \cos(\sqrt{2}t/3) + c_2 e^{t/3} \sin(\sqrt{2}t/3)$$



## Capítulo 3.4:

### Exemplo 4: Part (a)

✦ Para o PVI  $y'' + y' + y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$   
Encontrar (a) a solução  $u(t)$  e  
(b) o menor tempo  $T$  para que  $|u(t)| \leq 0.1$

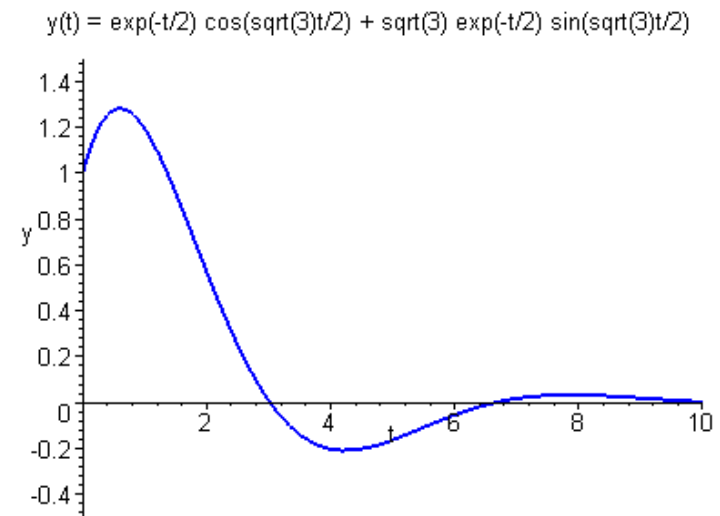
✦ Nos sabemos do Exemplo 1 que a solução geral é  
 $u(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + c_2 e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$

✦ Usando as condições iniciais, obtemos

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

✦ Assim

$$u(t) = e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$$



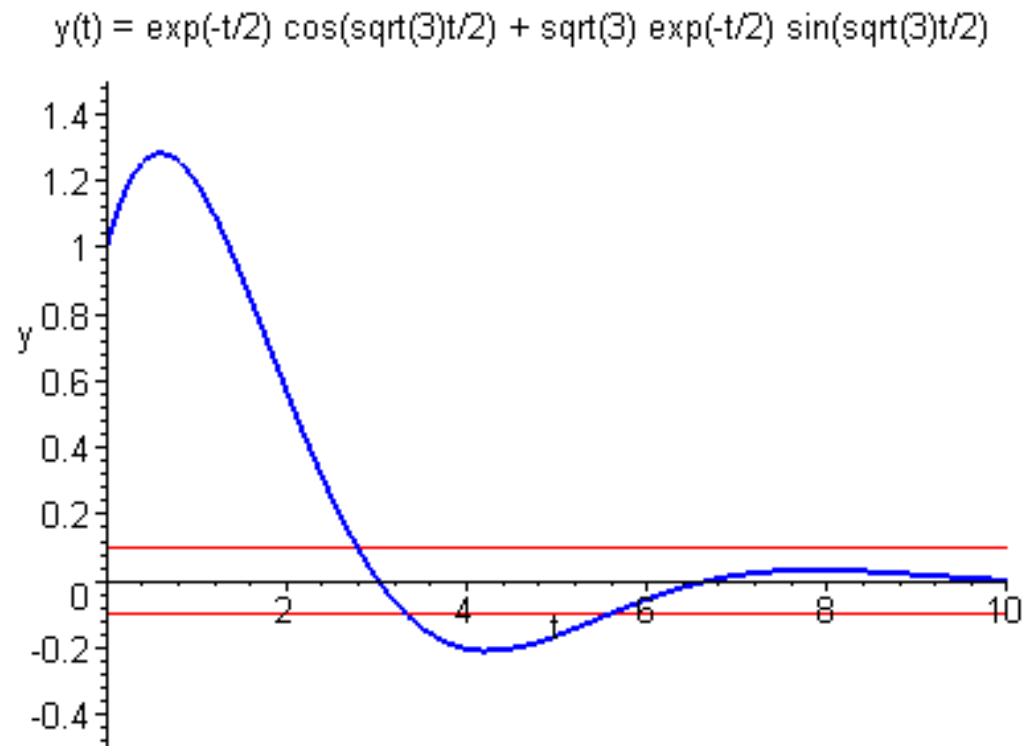
## Capítulo 3.4:

### Exemplo 4: Part (b)

- ✦ Encontrar o menor tempo  $T$  para que  $|u(t)| \leq 0.1$
- ✦ A solução é

$$u(t) = e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$$

- ✦ Com a ajuda do computador encontramos  $T \cong 2.79$ .



## Capítulo 3.5: Raízes Repetidas; Redução de Ordem

- ✦ Novamente uma EDO de 2ª ordem linear homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais.

- ✦ Usando as soluções exponenciais da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$$

- ✦ A fórmula quadrática nos dá duas soluções,  $r_1$  e  $r_2$ :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ✦ Se  $b^2 - 4ac = 0$ ,  $r_1 = r_2 = -b/2a$ , assim este método só fornece uma solução:

$$y_1(t) = ce^{-bt/2a}$$

## Capítulo 3.5:

### Segunda Solução: Fator de Multiplicação $v(t)$

✳ Nos sabemos que se

$y_1(t)$  é uma solução  $\Rightarrow y_2(t) = cy_1(t)$  é uma solução também

✳ Só que  $y_1$  e  $y_2$  são LD, vamos generalizar esta aproximação e multiplicar por uma função  $v$ , e determinar condições para que  $y_2$  seja uma solução:

$y_1(t) = e^{-bt/2a}$  é uma solução  $\Rightarrow$  faça  $y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$

✳ Então

$$y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2'(t) = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2''(t) = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}$$

## Capítulo 3.5: $ay'' + by' + cy = 0$

### Encontrando o Fator de Multiplicação $v(t)$

✳ Substituindo as derivadas na EDO, chegamos na fórmula para  $v$ :

$$e^{-bt/2a} \left\{ a \left[ v''(t) - \frac{b}{a} v'(t) + \frac{b^2}{4a^2} v(t) \right] + b \left[ v'(t) - \frac{b}{2a} v(t) \right] + cv(t) \right\} = 0$$

$$av''(t) - bv'(t) + \frac{b^2}{4a} v(t) + bv'(t) - \frac{b^2}{2a} v(t) + cv(t) = 0$$

$$av''(t) + \left( \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) v(t) = 0$$

$$av''(t) + \left( \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \right) v(t) = 0 \Leftrightarrow av''(t) + \left( \frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \right) v(t) = 0$$

$$av''(t) - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) v(t) = 0$$

$$v''(t) = 0 \Rightarrow v(t) = k_3 t + k_4$$



## Capítulo 3.5: Solução Geral

✦ Para encontrar nossa solução geral, nós temos:

$$\begin{aligned}y(t) &= k_1 e^{-bt/2a} + k_2 v(t) e^{-bt/2a} \\ &= k_1 e^{-bt/2a} + (k_3 t + k_4) e^{-bt/2a} \\ &= c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}\end{aligned}$$

✦ A solução geral para raízes repetidas é

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

## Capítulo 3.5: Wronskiano

✦ A solução Geral é

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

✦ Cada solução é uma combinação linear de

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}, \quad y_2(t) = t e^{-bt/2a}$$

✦ O Wronskiano das duas soluções é

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & t e^{-bt/2a} \\ -\frac{b}{2a} e^{-bt/2a} & \left(1 - \frac{bt}{2a}\right) e^{-bt/2a} \end{vmatrix} \\ &= e^{-bt/a} \left(1 - \frac{bt}{2a}\right) + e^{-bt/a} \left(\frac{bt}{2a}\right) \\ &= e^{-bt/a} \neq 0 \quad \text{para todo } t \end{aligned}$$

✦ Assim,  $y_1$  e  $y_2$  formam o conjunto fundamental das soluções.

# Capítulo 3.5:

## Exemplo 1

✦ Considere o PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

✦ Usando as soluções exponenciais vinda da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$$

✦ Portanto a solução geral é

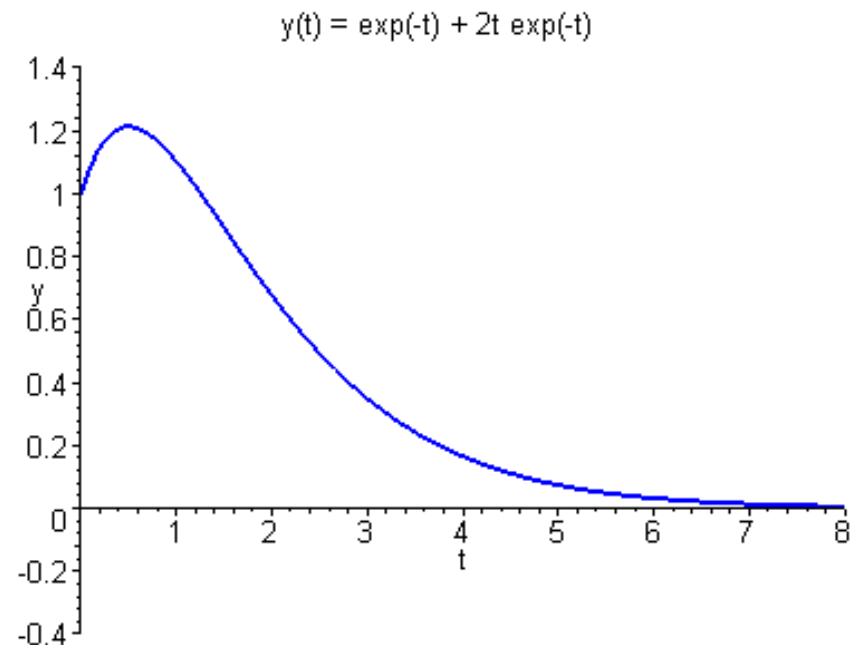
$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

✦ Usando as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2$$

✦ Assim

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$$



## Capítulo 3.5: Exemplo 2

✦ Considere o PVI

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/2$$

✦ Usando as soluções exponenciais da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 - r + 0.25 = 0 \Leftrightarrow (r - 1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1/2$$

✦ Portanto a solução geral é

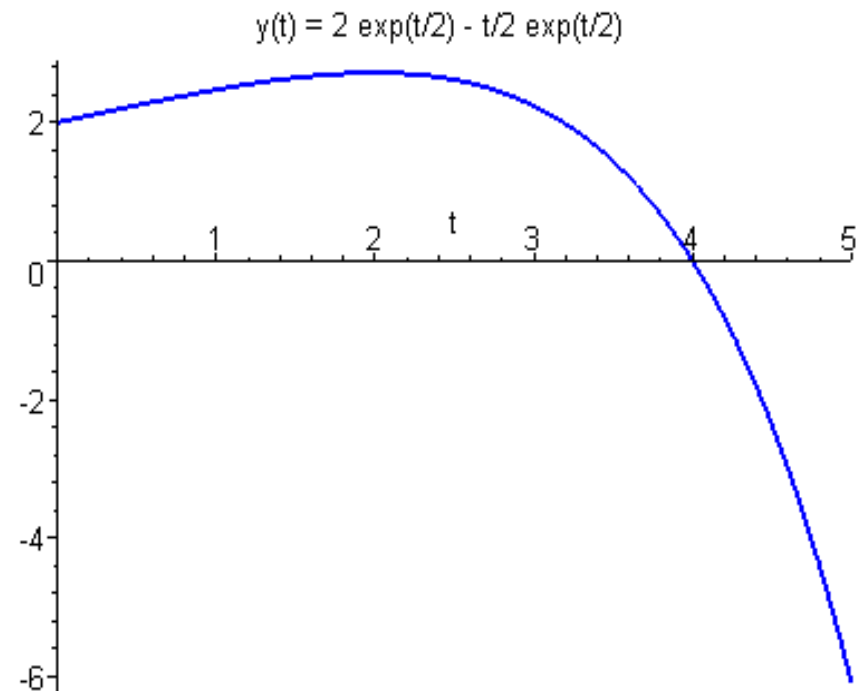
$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}$$

✦ Usando as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 2, \quad c_2 = -\frac{1}{2}$$

✦ Assim

$$y(t) = 2e^{t/2} - \frac{1}{2}te^{t/2}$$



## Capítulo 3.5: Exemplo 3

✦ Considere o PVI

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3/2$$

✦ Usando as soluções exponenciais vinda da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 - r + 0.25 = 0 \Leftrightarrow (r - 1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1/2$$

✦ Portanto a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}$$

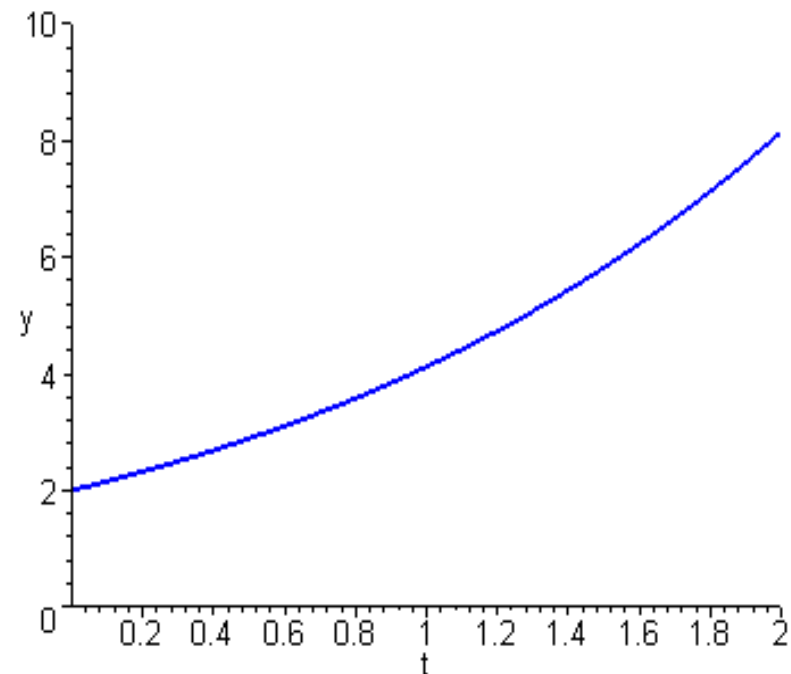
✦ Usando as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 2, c_2 = \frac{1}{2}$$

✦ Assim

$$y(t) = 2e^{t/2} + \frac{1}{2}te^{t/2}$$

$$y(t) = 2 \exp(t/2) + t/2 \exp(t/2)$$



## Capítulo 3.5: Redução de Ordem (também)

- ✦ O método usado nesta seção também é utilizado para equações com coeficientes não constantes:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- ✦ Isto é, **dado uma solução**  $y_1$ , faça  $y_2 = v(t)y_1$ :

$$y_2(t) = v(t)y_1(t)$$

$$y_2'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

$$y_2''(t) = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t)$$

- ✦ Substituindo isto na EDO e agrupando termos,

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0$$

- ✦ Como  $y_1$  é uma solução da EDO, esta última equação se reduz em uma equação de 1ª ordem em  $v'$ :

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0$$

## Capítulo 3.5:

### Exemplo 4: Redução de Ordem

✦ Dado a equação de coeficiente variáveis e uma solução  $y_1$ ,

$$t^2 y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1},$$

usando o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução:

$$y_2(t) = v(t) t^{-1}$$

$$y_2'(t) = v'(t) t^{-1} - v(t) t^{-2}$$

$$y_2''(t) = v''(t) t^{-1} - 2v'(t) t^{-2} + 2v(t) t^{-3}$$

✦ Substituindo isto na EDO e agrupando termos,

$$t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) + vt^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow v''t - 2v' + 2vt^{-1} + 3v' - 3vt^{-1} + vt^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow tv'' + v' = 0$$

$$\Leftrightarrow tu' + u = 0, \quad \text{onde } u(t) = v'(t)$$

## Capítulo 3.5:

### Exemplo 4: Encontrando $v(t)$

✦ Resolvendo

$$tu' + u = 0, \quad u(t) = v'(t)$$

para  $u$ , nos podemos usar o método de separação de variáveis:

$$t \frac{du}{dt} + u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{t} dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| = -\ln|t| + C$$

$$\Leftrightarrow |u| = |t|^{-1} e^C \quad \Leftrightarrow \quad u = ct^{-1}, \text{ desde que } t > 0.$$

✦ Assim

$$v' = \frac{c}{t}$$

e portanto

$$v(t) = c \ln t + k$$



## Capítulo 3.5:

### Exemplo 4: Solução Geral

✦ Nos temos

$$v(t) = c \ln t + k$$

✦ Assim

$$y_2(t) = (c \ln t + k)t^{-1} = ct^{-1} \ln t + kt^{-1}$$

✦ Lembrando

$$y_1(t) = t^{-1}$$

e portanto nós podemos concluir o segundo termo  $y_2$

$$y_2(t) = t^{-1} \ln t.$$

✦ Daqui a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1} \ln t$$

# Capítulo 3.6:

## Equações Não Homogêneas

### Método dos Coeficientes Indeterminados

✦ Uma equação não homogênea é dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

onde  $p$ ,  $q$ ,  $g$  são funções contínuas em um intervalo aberto  $I$ .

✦ A equação homogênea associada é

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

✦ É necessário saber as soluções da equação homogênea.

## Capítulo 3.6: Teorema 3.6.1

✦ Se  $Y_1, Y_2$  são as soluções da equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

então  $Y_1 - Y_2$  é uma solução da equação homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

✦ Se  $y_1, y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea, então existem constante  $c_1, c_2$  tal que

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

## Capítulo 3.6:

### Teorema 3.6.2 (Solução Geral)

✦ A solução geral da equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

onde  $y_1, y_2$  formam o conjunto fundamental de soluções da equação homogênea,  $c_1, c_2$  são constantes arbitrárias e  $Y$  é uma solução particular da equação não homogênea.

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0$$

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = g(t)$$

## Capítulo 3.6: Método dos Coeficientes Indeterminados

- ✦ Lembrando uma equação não homogênea é dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

com solução geral

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

- ✦ Nesta seção usaremos o método dos **coeficientes indeterminados** para encontrar uma solução particular  $Y$  para a equação não homogênea, assumindo que podemos encontrar soluções  $y_1, y_2$  para o caso homogêneo.
- ✦ O método dos coeficientes indeterminados é usualmente limitado para quando  $p$  e  $q$  são constantes, e  $g(t)$  é uma função polinomial, exponencial, seno ou co-seno.

## Capítulo 3.6:

### Exemplo 1: $g(t)$ , Exponencial

- ✦ Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- ✦ Nós procuramos  $Y$  que satisfaça a esta equação. Sabendo que as exponenciais se repetem com a diferenciação, é um bom ponto de partida para  $Y$  supormos uma função exponencial:

$$Y(t) = Ae^{2t} \Rightarrow Y'(t) = 2Ae^{2t}, Y''(t) = 4Ae^{2t}$$

- ✦ Substituindo ela e suas derivadas na equação,

$$4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow -6Ae^{2t} = 3e^{2t} \Leftrightarrow A = -1/2$$

- ✦ Assim uma solução particular para a EDO não homogênea é

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

## Capítulo 3.6:

### Exemplo 2: $g(t)$ , seno

- ✦ Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} t$$

- ✦ Procuramos  $Y$  que satisfaz esta equação.

Começamos com um chute (método ansatz):

$$Y(t) = A \operatorname{sen} t \Rightarrow Y'(t) = A \operatorname{cos} t, Y''(t) = -A \operatorname{sen} t$$

- ✦ Substituindo na equação,

$$-A \operatorname{sen} t - 3A \operatorname{cos} t - 4A \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t$$

$$\Leftrightarrow (2 + 5A) \operatorname{sen} t + 3A \operatorname{cos} t = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \operatorname{cos} t = 0$$

- ✦  $\operatorname{sen}(x)$  e  $\operatorname{cos}(x)$  são LI (não são múltiplos um do outro), temos  $c_1 = c_2 = 0$ , e assim  $2 + 5A = 3A = 0$ , o que é impossível.

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} t$$

## Capítulo 3.6: Exemplo 2: $g(t)$ , seno

✦ Nossa tentativa agora para  $Y$  é

$$Y(t) = A \operatorname{sen} t + B \operatorname{cos} t$$

$$\Rightarrow Y'(t) = A \operatorname{cos} t - B \operatorname{sen} t, Y''(t) = -A \operatorname{sen} t - B \operatorname{cos} t$$

✦ Substituindo na EDO, obtemos

$$(-A \operatorname{sen} t - B \operatorname{cos} t) - 3(A \operatorname{cos} t - B \operatorname{sen} t) - 4(A \operatorname{sen} t + B \operatorname{cos} t) = 2 \operatorname{sen} t$$

$$\Leftrightarrow (-5A + 3B) \operatorname{sen} t + (-3A - 5B) \operatorname{cos} t = 2 \operatorname{sen} t$$

$$\Leftrightarrow -5A + 3B = 2, -3A - 5B = 0$$

$$\Leftrightarrow A = -5/17, B = 3/17$$

✦ Portanto a solução particular para a EDO não homogênea é

$$Y(t) = \frac{-5}{17} \operatorname{sen} t + \frac{3}{17} \operatorname{cos} t$$



## Capítulo 3.6:

### Exemplo 3: $g(t)$ , Polinomial

- ✦ Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$$

- ✦ Procuramos  $Y$  que satisfaça a equação. Vamos começar com

$$Y(t) = At^2 + Bt + C \Rightarrow Y'(t) = 2At + B, Y''(t) = 2A$$

- ✦ Substituindo ela e suas derivadas na EDO, obtemos,

$$2A - 3(2At + B) - 4(At^2 + Bt + C) = 4t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -4At^2 - (6A + 4B)t + (2A - 3B - 4C) = 4t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -4A = 4, 6A + 4B = 0, 2A - 3B - 4C = -1$$

$$\Leftrightarrow A = -1, B = 3/2, C = -11/8$$

- ✦ Portanto a solução particular para a EDO não homogênea é

$$Y(t) = -t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{11}{8}$$

## Capítulo 3.6:

### Exemplo 4: $g(t)$ , Produto

✦ Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t$$

✦ Procuramos  $Y$  que satisfaça a equação, como segue:

$$Y(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \sin 2t$$

$$Y'(t) = Ae^t \cos 2t - 2Ae^t \sin 2t + Be^t \sin 2t + 2Be^t \cos 2t$$

$$= (A + 2B)e^t \cos 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

$$Y''(t) = (A + 2B)e^t \cos 2t - 2(A + 2B)e^t \sin 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

$$+ 2(-2A + B)e^t \cos 2t$$

$$= (-3A + 4B)e^t \cos 2t + (-4A - 3B)e^t \sin 2t$$

✦ Substituindo na EDO e resolvendo para  $A$  e  $B$ :

$$A = \frac{10}{13}, \quad B = \frac{2}{13} \quad \Rightarrow \quad Y(t) = \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sin 2t$$

## Capítulo 3.6:

### Discussão: $g(t)$ , Soma

- ✦ Considere agora a equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

- ✦ Suponha que  $g(t)$  é a soma de funções:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

- ✦ Se  $Y_1, Y_2$  são soluções de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t)$$

respectivamente, então  $Y_1 + Y_2$  é uma solução da equação não homogênea acima.

## Capítulo 3.6: Exemplo 5: Soma $g(t)$

✦ Considere a equação

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\sin t - 8e^t \cos 2t$$

✦ Nossas equações para resolver individualmente são

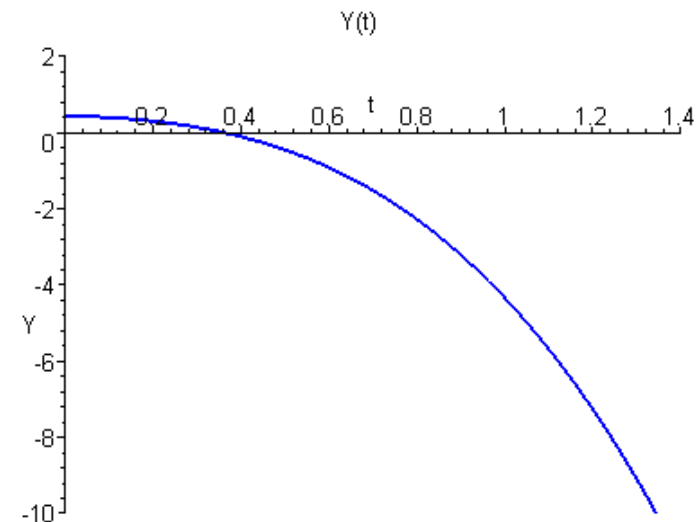
$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$$

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t$$

✦ A solução particular é então

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sin 2t$$



## Capítulo 3.6:

### Exemplo 6:

✦ Considere a equação

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t$$

✦ Procuramos  $Y$  que satisfaça a equação. Começamos com

$$Y(t) = A \sin 2t + B \cos 2t$$

$$\Rightarrow Y'(t) = 2A \cos 2t - 2B \sin 2t, Y''(t) = -4A \sin 2t - 4B \cos 2t$$

✦ Substituindo na EDO :

$$(-4A \sin 2t - 4B \cos 2t) + 4(A \sin 2t + B \cos 2t) = 3 \cos 2t$$

$$(-4A + 4A) \sin 2t + (-4B + 4B) \cos 2t = 3 \cos 2t$$

$$0 = 3 \cos 2t$$

✦ Portanto não existe solução particular da forma

$$Y(t) = A \sin 2t + B \cos 2t$$

## Capítulo 3.6:

### Exemplo 6: Solução Homogênea

✦ Como não existe solução particular da forma

$$Y(t) = A \sin 2t + B \cos 2t$$

✦ Para ajudar a compreender porque isso ocorreu, vamos recordar que a solução homogênea correspondente vista na seção 3.4:

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

✦ Assim nossa suposta solução particular resolve a equação homogênea

$$y'' + 4y = 0$$

em vez da equação não homogênea.

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t$$

# Capítulo 3.6:

## Exemplo 6: Solução Particular

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t$$

✦ Nossa próxima tentativa para encontrar um  $Y$  é:

$$Y(t) = At \sin 2t + Bt \cos 2t$$

$$Y'(t) = A \sin 2t + 2At \cos 2t + B \cos 2t - 2Bt \sin 2t$$

$$\begin{aligned} Y''(t) &= 2A \cos 2t + 2A \cos 2t - 4At \sin 2t - 2B \sin 2t - 2B \sin 2t - 4Bt \cos 2t \\ &= 4A \cos 2t - 4B \sin 2t - 4At \sin 2t - 4Bt \cos 2t \end{aligned}$$

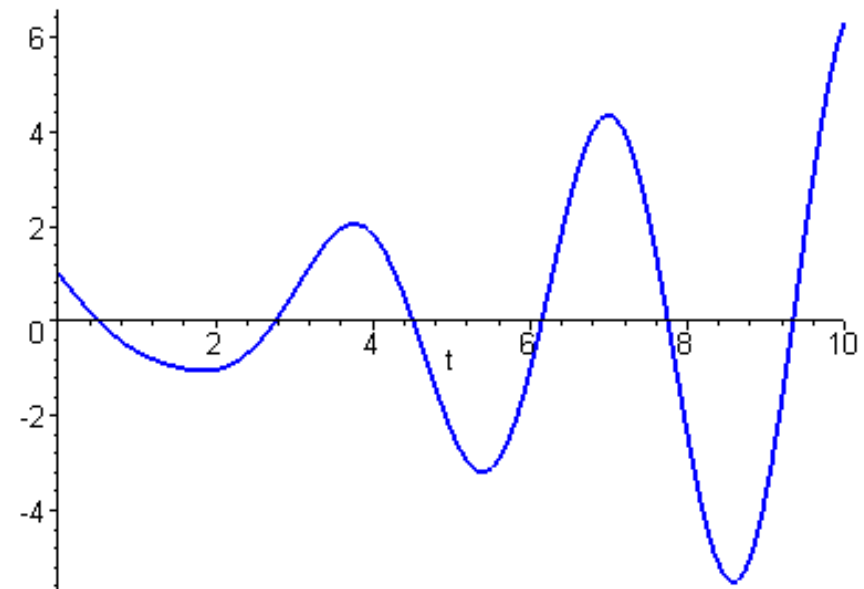
$$y(t) = \cos(2t) - \sin(2t) + \frac{3t}{4} \sin(2t)$$

✦ Substituindo na EDO,

$$4A \cos 2t - 4B \sin 2t = 3 \cos 2t$$

$$\Rightarrow A = 3/4, B = 0$$

$$\Rightarrow Y(t) = \frac{3}{4}t \sin 2t$$



## Capítulo 3.6:

Tabela: A solução Particular de  
 $ay''+by'+cy=g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$	$t^s (A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s (A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t} \begin{cases} \text{sen } \beta t \\ \text{cos } \beta t \end{cases}$	$t^s [(A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n)e^{\alpha t} \text{cos } \beta t + (B_0 + B_1t + \dots + B_nt^n)e^{\alpha t} \text{sen } \beta t]$

Obs.: Aqui,  $s$  denota o menor inteiro não-negativo ( $s=0,1$  ou  $2$ ) que garanta que nenhuma parcela de  $Y_i(t)$  seja solução da equação homogênea correspondente.



## Capítulo 3.7: (não) Variação dos Parâmetros

- ✦ Uma equação não homogênea é dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

onde  $p$ ,  $q$ ,  $g$  são funções contínuas em um intervalo aberto  $I$ .

- ✦ A equação homogênea associada é

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- ✦ Nesta seção nós aprenderemos o método de **variação dos parâmetros** para resolver a equação não homogênea. Como no método dos coeficientes indeterminados, este procedimento requer o conhecimento das soluções da equação homogênea.
- ✦ Variação dos parâmetros é um método geral, e não requer nenhuma suposição detalhada sobre a forma da solução. Entretanto, determinadas integrais necessitam ser avaliadas, e estas pode apresentar dificuldades.

## Capítulo 3.7:

### Exemplo: Variação dos Parâmetros

- ✦ Procuramos uma solução particular para equação abaixo.

$$y'' + 4y = 3 \cos \sec t$$

- ✦ Não podemos usar o método de coeficientes indeterminados

- ✦ Lembrando que a solução da EDO homogênea associada é

$$y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sen 2t$$

- ✦ Para encontrar uma solução particular para equação não homogênea, nós começamos com o formula

$$y(t) = u_1(t) \cos 2t + u_2(t) \sen 2t$$

- ✦ Então

$$y'(t) = u_1'(t) \cos 2t - 2u_1(t) \sen 2t + u_2'(t) \sen 2t + 2u_2(t) \cos 2t$$

- ✦ ou

$$y'(t) = -2u_1(t) \sen 2t + 2u_2(t) \cos 2t + u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \sen 2t$$

## Capítulo 3.7:

### Exemplo: Derivadas, 2ª Equação

✦ De resultados anteriores,

$$y'(t) = -2u_1(t) \operatorname{sen} 2t + 2u_2(t) \operatorname{cos} 2t + u_1'(t) \operatorname{cos} 2t + u_2'(t) \operatorname{sen} 2t$$

✦ Note que nós necessitamos de duas equações para encontrar  $u_1$  e  $u_2$ . A primeira equação é a equação diferencial. Para uma segunda equação, tome

$$u_1'(t) \operatorname{cos} 2t + u_2'(t) \operatorname{sen} 2t = 0$$

✦ Então

$$y'(t) = -2u_1(t) \operatorname{sen} 2t + 2u_2(t) \operatorname{cos} 2t$$

✦ Segue,

$$y''(t) = -2u_1'(t) \operatorname{sen} 2t - 4u_1(t) \operatorname{cos} 2t + 2u_2'(t) \operatorname{cos} 2t - 4u_2(t) \operatorname{sen} 2t$$

## Capítulo 3.7:

### Exemplo: Duas equações

✦ Lembrando que nossa equação diferencial é

$$y'' + 4y = 3 \csc t$$

✦ Substituindo  $y''$  e  $y$  na equação, obtemos

$$\begin{aligned} & -2u_1'(t) \sen 2t - 4u_1(t) \cos 2t + 2u_2'(t) \cos 2t - 4u_2(t) \sen 2t \\ & + 4(u_1(t) \cos 2t + u_2(t) \sen 2t) = 3 \csc t \end{aligned}$$

✦ Esta equação simplificada fica

$$-2u_1'(t) \sen 2t + 2u_2'(t) \cos 2t = 3 \csc t$$

✦ Assim, para resolver  $u_1$  e  $u_2$ , nos temos duas equações:

$$\begin{aligned} & -2u_1'(t) \sen 2t + 2u_2'(t) \cos 2t = 3 \csc t \\ & u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \sen 2t = 0 \end{aligned}$$

## Capítulo 3.7:

### Exemplo: Resolvendo o $u_1'$

✦ Para encontrar  $u_1$  e  $u_2$ , necessitamos resolver as equações

$$-2u_1'(t) \operatorname{sen} 2t + 2u_2'(t) \cos 2t = 3 \operatorname{csc} t$$

$$u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \operatorname{sen} 2t = 0$$

✦ Da segunda equação,

$$u_2'(t) = -u_1'(t) \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} 2t}$$

✦ Substituindo este valor na primeira equação,

$$-2u_1'(t) \operatorname{sen} 2t + 2 \left[ -u_1'(t) \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} 2t} \right] \cos 2t = 3 \operatorname{csc} t$$

$$-2u_1'(t) \operatorname{sen}^2(2t) - 2u_1'(t) \cos^2(2t) = 3 \operatorname{csc} t \operatorname{sen} 2t$$

$$-2u_1'(t) [\operatorname{sen}^2(2t) + \cos^2(2t)] = 3 \left[ \frac{2 \operatorname{sen} t \cos t}{\operatorname{sen} t} \right]$$

$$u_1'(t) = -3 \cos t$$

## Capítulo 3.7:

### Exemplo : Resolvendo para $u_1$ e $u_2$

✦ De resultados anteriores,

$$u_1'(t) = -3 \cos t, \quad u_2'(t) = -u_1'(t) \frac{\cos 2t}{\sin 2t}$$

✦ Então

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= 3 \cos t \left[ \frac{\cos 2t}{\sin 2t} \right] = 3 \cos t \left[ \frac{1 - 2 \sin^2 t}{2 \sin t \cos t} \right] = 3 \left[ \frac{1 - 2 \sin^2 t}{2 \sin t} \right] \\ &= 3 \left[ \frac{1}{2 \sin t} - \frac{2 \sin^2 t}{2 \sin t} \right] = \frac{3}{2} \csc t - 3 \sin t \end{aligned}$$

✦ Assim

$$u_1(t) = \int u_1'(t) dt = \int -3 \cos t dt = -3 \sin t + c_1$$

$$u_2(t) = \int u_2'(t) dt = \int \left( \frac{3}{2} \csc t - 3 \sin t \right) dt = \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| + 3 \cos t + c_2$$

## Capítulo 3.7:

### Exemplo: Solução Geral

- ✳ Lembrando nossa equação e a solução homogênea  $y_C$ :

$$y'' + 4y = 3 \csc t, \quad y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

- ✳ Usando as expressões para  $u_1$  e  $u_2$  vista anteriormente, a solução geral para a equação diferencial é

$$\begin{aligned} y(t) &= u_1(t) \cos 2t + u_2(t) \sin 2t + y_h(t) \\ &= -3 \sin t \cos 2t + \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| \sin 2t + 3 \cos t \sin 2t + y_h(t) \\ &= 3 [\cos t \sin 2t - \sin t \cos 2t] + \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| \sin 2t + y_h(t) \\ &= 3 [2 \sin t \cos^2 t - \sin t (2 \cos^2 t - 1)] + \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| \sin 2t + y_h(t) \\ &= 3 \sin t + \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| \sin 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \end{aligned}$$

## Capítulo 3.7: $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$

### Resumo $y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$

✳ Suponha que  $y_1, y_2$  são soluções fundamentais para a equação homogênea associada com a equação não homogênea acima, onde nota-se que o coeficiente em  $y''$  é 1.

✳ Para encontrar  $u_1$  e  $u_2$ , necessitamos resolver a equação

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0$$

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t)$$

✳ Fazendo assim, e usando o Wronskiano, nós obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \quad u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}$$

✳ Assim

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + c_1, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + c_2$$



## Capítulo 3.7:

### Teorema 3.7.1

✦ Considere a equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (2)$$

✦ Se as funções  $p$ ,  $q$  e  $g$  são contínuas no intervalo aberto  $I$ , e se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções fundamentais para a Eq. (2), então uma solução particular da Eq. (1) é

$$Y(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

e uma solução geral é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$