Capítulo 4.1: EDOs Lineares de Ordem Superior

- Uma EDO Linear de ordem n tem a seguinte forma:

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t)$$

- Vamos assumir que $P_0, \ldots, P_n$, e G são funções reais contínuas em algum intervalo $I = (\alpha, \beta)$, e que P_0 não se anule em I.
- Dividindo por P_0, a EDO fica

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$$

- Para uma EDO de Ordem n, temos n condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0,\ \ y'(t_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

Teorema 4.1.1

- Considere o Problema de Valor Inicial (PVI) de ordem n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$$

$$y(t_0) = y_0,\ \ y'(t_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

- Se as funções $p_1, \ldots, p_n$, e g são continuas em um intervalo aberto I, então existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ que satisfaz o PVI. Esta solução existe em todo intervalo I.
- Exemplo: Determine o intervalo onde a solução exista.

$$t^2 y^{(4)} + t y^{(3)} + 5y = \sin t$$

Equações Homogênea

- Como no caso de 2ª ordem, iniciamos com a EDO homogênea:

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = 0$$

- Se $y_1, \ldots, y_n$ são soluções da EDO, então a comb. linear delas tb é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

- Toda solução é desta forma, onde os coeficientes são determinados pelas condições iniciais, dada pelo sistema abaixo:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + \cdots + c_n y_n'(t_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Equações Homogênea e Wronskiano

- O sistema de equações anterior tem solução única se e somente se o determinante, ou Wronskiano, é não nulo em t_0:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) & \cdots & y_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & y_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

- Se t_0 é um ponto no intervalo I, o Wronskiano é necessariamente não nulo em todo intervalo I.
- Portanto, se o Wronskiano é zero em algum ponto do intervalo I, então é identicamente nulo em todo I.

Teorema 4.1.2

- Considere o PVI de ordem n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = 0$$

$$y(t_0) = y_0,\ \ y'(t_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y^{(n-1)}$$

- Se as funções $p_1, \ldots, p_n$ são contínuas em um intervalo aberto I, e se $y_1, \ldots, y_n$ são soluções com $W(y_1, \ldots, y_n)(t) \neq 0$ para algum t em I, então toda solução y da EDO pode ser dada pela combinação linear de $y_1, \ldots, y_n$:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

Exemplo

- Verificar que as funções dadas são soluções da equação diferencial, e determinar seu Wronskiano .

$$-t^2 y''' + t y'' = 0; \quad 1,\ t,\ t^3$$

Soluções Fundamental e Independencia Linear

- Considere a EDO de ordem *n*:

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0$$

- Um conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de soluções com $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ em I é chamado de **Conjunto Fundamental de Soluções (CFS)**.
- Uma vez que todas as soluções podem ser expressas como uma combinação linear do CFS, a solução é geral

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

- Se $y_1, \ldots, y_n$ são Soluções Fundamental então $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ em I. É equivalente a dizer que $y_1, \ldots, y_n$ são Linearmente Independente **(LI)**:

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0 \text{ iff } c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Equação não homogênea

- Considere a equação não homogênea:

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$$

- Se Y_1, Y_2 são soluções da equação não homogênea, então Y_1 - Y_2 é uma solução para a equação homogênea:

$$L[Y_1 - Y_2] = L[Y_1] - L[Y_2] = g(t) - g(t) = 0$$

- Então existem coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ tal que

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

- Portanto a solução geral da EDO não homogênea é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + Y(t)$$

onde Y é uma solução particular para EDO não homogênea.

Capítulo 4.2: Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

- Considere a equação diferencial linear de ordem n homogênea com coeficientes reais e constantes:

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

- Da mesma forma que foi feito para o caso de ordem 2, $y = e^{rt}$ é uma solução para valores de r que são raízes do polinômio característico $Z(r)$:

$$L\left[e^{rt}\right] = e^{rt} \underbrace{\left[a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n\right]}_{\text{polinômio característico } Z(r)} = 0$$

- Pelo teorema fundamental da álgebra, um polinômio de grau n tem n raízes r_1, r_2, …, r_n, e portanto

$$Z(r) = a_0 (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n)$$

Raízes reais e distintas

- Se as raízes do polinômio característico $Z(r)$ são reais e distintas, então existem n soluções distintas da equação diferencial:

$$e^{r_1 t},\ e^{r_2 t},\ \ldots,\ e^{r_n t}$$

- Se estas funções são linearmente independentes, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \ldots + c_n e^{r_n t}$$

- O Wronskiano pode ser usado para determinar se as soluções são LI.

$$W(e^{r_1 t},\ e^{r_2 t},\ \ldots,\ e^{r_n t}) \neq 0$$

Exemplo 1: Raízes reais e distintas (1 de 3)

- Considere o PVI

$$y^{(4)} + 2y''' - 13y'' - 14y' + 24y = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0, y'''(0) = -1$$

- Assumindo a solução exponencial temos a equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^4 + 2r^3 - 13r^2 - 14r + 24 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (r-1)(r+2)(r-3)(r+4) = 0$$

- Assim a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} + c_3 e^{-4t}$$

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} + c_3 e^{-4t}$$

Exemplo 1: Solução (2 de 3)

- Das condições iniciais

$$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0, y'''(0) = -1$$

Temos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 + 3c_3 - 4c_4 &= -1 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 + 16c_4 &= 0 \\ c_1 - 8c_2 + 27c_3 - 64c_4 &= -1 \end{aligned}$$

- Resolvendo, $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{4}{5},\ c_3 = -\frac{11}{70},\ c_4 = -\frac{1}{7}$

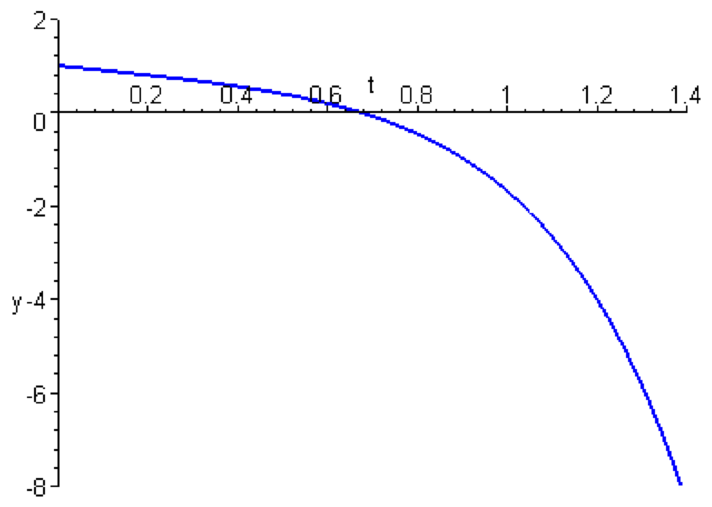
- Obtem-se

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{t} + \frac{4}{5} e^{-2t} - \frac{11}{70} e^{3t} - \frac{1}{7} e^{-4t}$$

Exemplo 1: Gráfico da Solução (3 de 3)

- O gráfico da solução é dada abaixo. Note o efeito da maior raiz da equação característica.

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{11}{70}e^{3t} - \frac{1}{7}e^{-4t}$$



Raízes Complexas

- Se o polinômio característico $Z(r)$ possui raízes complexas, então elas ocorrem em pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$.
- Note que nem todas raízes serão complexas.
- Soluções correspondentes as raízes complexas possui a forma

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t}\cos\mu t + ie^{\lambda t}\sin\mu t$$
$$e^{(\lambda-i\mu)t} = e^{\lambda t}\cos\mu t - ie^{\lambda t}\sin\mu t$$

- Como antes, nos usaremos as soluções com valores reais.

$$e^{\lambda t}\cos\mu t,\ e^{\lambda t}\sin\mu t$$

Exemplo 2: Raízes Complexas

- Considere a equação

$$y''' - y = 0$$

- Então

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(r-1\right)\left(r^2 + r + 1\right) = 0$$

- Agora

$$r^2 + r + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- Assim, a solução é geral

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3} t / 2\right) + c_3 e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3} t / 2\right)$$

Exemplo 3: Raízes Complexas(1 de 2)

- Considere o PVI

$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 7/2, y'(0) = -4, y''(0) = 5/2, y'''(0) = -2$$

- Então

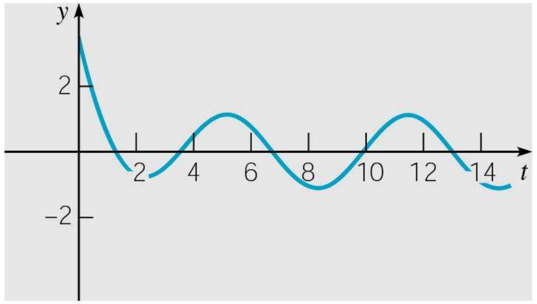
$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(r^2 - 1\right)\left(r^2 + 1\right) = 0$$

- As raízes são 1, -1, *i*, -*i*. Assim a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t)$$

- Usando as condições iniciais, nos obtemos

$$y(t) = 0e^t + 3e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) - \sin(t)$$



- O gráfico da solução é dada ao lado

$$y(t) = 0e^{t} + 3e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) - \sin(t)$$

Exemplo 3: Uma pequena modificação na condição inicial (2 de 2)

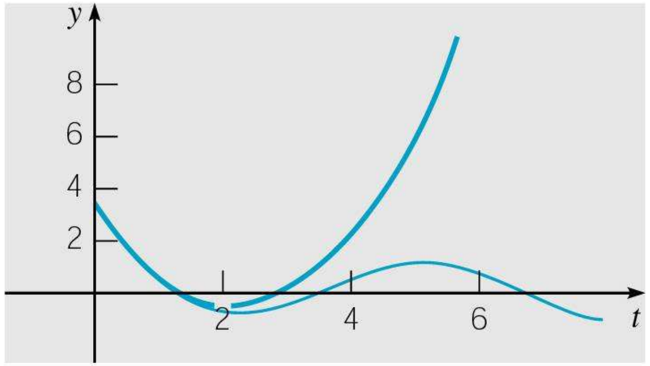
- Note que se uma condição inicial é ligeiramente modificada, a solução pode mudar significativamente. Por exemplo:

substitua $y(0) = 7/2,\ y'(0) = -4,\ y''(0) = 5/2,\ y'''(0) = -2$

por $y(0) = 7/2,\ y'(0) = -4,\ y''(0) = 5/2,\ y'''(0) = -15/8$

$$y(t) = \frac{1}{32}e^{t} + \frac{95}{32}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{17}{16}\sin(t)$$

- O gráfico desta solução e da soluçao original são dados abaixo.



Raízes Repetidas

- Suponha uma raiz r_k do polinómio característico $Z(r)$ é uma raiz repetida com multiplicidade s. Então as soluções LI correspondentes a esta raiz tem a seguinte forma repetida

$$e^{r_k t},\ te^{r_k t},\ t^2 e^{r_k t},\ \ldots,\ t^{s-1} e^{r_k t}$$

- Se uma raiz complexa $\lambda + i\mu$ é repetida s vezes, então sua conjugada tb é $\lambda - i\mu$. Então as soluções LI correspondentes a esta raiz tem a seguinte forma repetida

$$e^{(\lambda+iu)t},\ te^{(\lambda+iu)t},\ t^2 e^{(\lambda+iu)t},\ \ldots,\ t^{s-1} e^{(\lambda+iu)t}$$

ou

$$e^{\lambda t}\cos \mu t,\ e^{\lambda t}\sin \mu t,\ te^{\lambda t}\cos \mu t,\ te^{\lambda t}\sin \mu t, \ldots,$$

$$t^{s-1} e^{r_k t}\cos \mu t,\quad t^{s-1} e^{r_k t} e^{\lambda t}\sin \mu t,$$

Exemplo 4: Raízes Repetidas

- Considere a equação

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

- Então

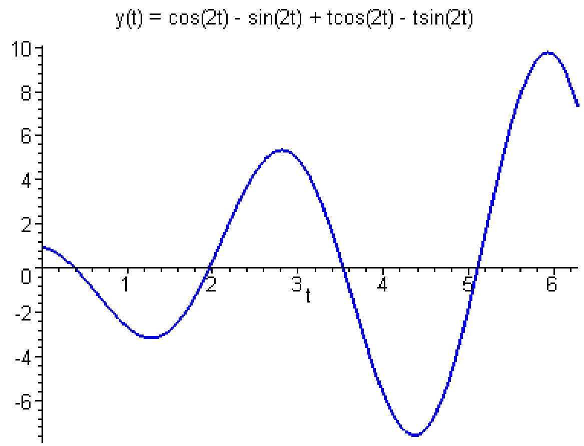
$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^4 + 8r + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(r^2 + 4\right)\left(r^2 + 4\right) = 0$$

- As raízes são $2i$, $2i$, $-2i$, $-2i$. Assim a solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 t \cos(2t) + c_4 t \sin(2t)$$

- PVI:

$$y(0) = 1; \qquad y'(0) = -1;$$
$$y''(0) = -8; \quad y'''(0) = -4.$$



- Solução do PVI:

$$y(t) = \cos 2t - sin2t + t\cos(2t) - tsin(2t)$$

Capítulo 4.3: Equações não Homogêneas: Método dos coeficientes Indeterminados

- O método de coeficientes indeterminado pode ser usado para encontrar uma solução particular *Y* de uma EDO linear não homogênea de ordem n e coeficiente constante

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(t),$$

  g é fornecida de uma forma adequada .
- Como no caso de 2ª ordem, o método dos coeficientes indeterminados é usado quando g é uma soma ou produto de funções polinomiais, exponenciais, senos e/ou co-senos.
- Secção 4,4 discutiremos o método de variação de parâmetros, que é um método mais geral.

Exemplo 1

- Considere a equação diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^{t}$$

- Para o caso homogêneo,

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^{3} - 3r^{2} + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow \quad (r-1)^{3} = 0$$

- Assim, a solução geral da equação é homogênea

$$y_C(t) = c_1 e^{t} + c_2 t e^{t} + c_3 t^{2} e^{t}$$

- Para o caso não homogêneo, tenha em mente a forma de solução homogênea. Assim começará

$$Y(t) = At^{3}e^{2t}$$

- Como no capítulo anterior, podemos verificar que

$$Y(t) = \frac{2}{3}t^{3}e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1 e^{t} + c_2 t e^{t} + c_3 t^{2} e^{t} + \frac{2}{3}t^{3}e^{2t}$$

Exemplo 2

- Considere a equação

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 2\sin t - 3\cos t$$

- Para o caso homogêneo,

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^4 + 8r + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(r^2 + 4\right)\left(r^2 + 4\right) = 0$$

- Assim, a solução geral da equação homogênea é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 t \cos(2t) + c_4 t \sin(2t)$$

- Para o caso não homogêneo, comece com

$$Y(t) = A\sin t + B\cos t$$

- Assim temos

$$Y(t) = \frac{2}{9}\sin t - \frac{1}{3}\cos t$$

Exemplo 3

- Considere a equação

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 2\sin 2t - 3\cos 2t$$

- Como no exemplo 2, assim a solução geral da equação homogênea é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 t\cos(2t) + c_4 t\sin(2t)$$

- Para o caso não homogêneo, tome

$$Y(t) = At^2 \sin 2t + Bt^2 \cos 2t$$

- Assim temos

$$Y(t) = -\frac{1}{16} t^2 \sin 2t + \frac{3}{32} t^2 \cos 2t$$

Exemplo 4

- Considere a equação

$$y''' - 9y' = t + e^{3t}$$

- Para o caso homogêneo,

$$y(t) = e^{rt} \;\Rightarrow\; r^3 - 9r = 0 \Leftrightarrow \; r\left(r^2 - 9\right) \;\Leftrightarrow\; r(r-3)(r+3) = 0$$

- Assim, a solução geral da equação homogênea é

$$y_C(t) = c_1 + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-3t}$$

- Para o caso não homogêneo, lembre-se de forma da solução homogênea. Assim, temos dois sub-casos:

$$Y_1(t) = \left(A + Bt\right)t, \;\; Y_2(t) = Cte^{3t},$$

- Portanto

$$Y_1(t) = -\frac{1}{18}t^2, \;\; Y_2(t) = \frac{1}{18}t\, e^{3t}$$

Capítulo 4.4: Variação de Parâmetros (1 de 5)

- O Método de variação de parâmetros pode ser usado para encontrar uma solução particular de uma EDO linear não homogênea de ordem n.

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t),$$

  desde que *g* seja contínua.
- Como no caso de segunda ordem, assumimos que y_1, y_2 …, y_n são soluções fundamentais da equação homogênea .
- Em seguida, assuma que a solução particular tem a forma Y

$$Y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t)$$

  onde u_1, u_2,… u_n são funções a serem determinadas.
- Para encontrar estas n funções, precisamos de n equações.

Derivando a Variação de Parâmetros (2 de 5)

- Primeiro, considere a derivadas de Y:

$$Y' = \left(u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n\right) + \left(u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n'\right)$$

- Se pedirmos que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0$$

então

$$Y'' = \left(u_1' y_1' + u_2' y_2' + \cdots + u_n' y_n'\right) + \left(u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \cdots + u_n y_n''\right)$$

- Assim pediremos que

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' + \cdots + u_n' y_n' = 0$$

- Continuando este processo, teremos k-1 equações

$$u_1' y_1^{(k-1)} + u_2' y_2^{(k-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(k-1)} = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

e onde

$$Y^{(k)} = u_1 y_1^{(k)} + \cdots + u_n y_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Derivando a Variação de Parâmetros (3 de 5)

- Assim,

$$Y^{(k)} = u_1 y_1^{(k)} + \cdots + u_n y_n^{(k)}, \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

- Finalmente,

$$Y^{(n)} = \left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right) + \left(u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}\right)$$

- Agora, substituindo esta derivada na nossa equação

$$y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t) y' + p_n(t) y = g(t)$$

- Observando que y_1, y_2 …, y_n são soluções da equação homogênea, e após a reorganização dos termos, obtemos

$$u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = g$$

Derivando a Variação de Parâmetros (4 de 5)

- As n equações necessária, a fim de encontrar as n funções $u_1, u_2, \ldots u_n$ são

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_1 &= 0 \\ u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} &= g \end{aligned}$$

- Usando a Regra de Cramer, para cada $k = 1, \ldots, n$,

$$u_k'(t) = \frac{g(t) W_k(t)}{W(t)}, \quad onde \;\; W(t) = W(y_1, \ldots, y_n)(t)$$

e W_k é o determinante obtido através da substituição da k-ésima coluna de W por (0, 0, …, 1).

Derivando a Variação de Parâmetros (5 de 5)

- Assim,

$$u_k'(t) = \frac{g(t)W_k(t)}{W(t)}, \quad k = 1, \ldots, n$$

- Integrando obtemos u_1, u_2,… u_n:

$$u_k(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)W_k(s)}{W(s)} ds, \quad k = 1, \ldots, n$$

- Assim, uma solução particular Y é dada por

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{g(s)W_k(s)}{W(s)} ds \right] y_k(t)$$

onde t_0 é arbitrario.

Exemplo (1 de 3)

- Considere a equação a seguir, junto com as dadas soluções correspondentes às soluções homogêneas y_1, y_2, y_3:

$$y''' - y'' - y' + y = e^{2t}, \quad y_1(t) = e^t, \; y_2(t) = te^t, \; y_3(t) = e^{-t}$$

- Então uma solução particular da EDO é dado por

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{3} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s} W_k(s)}{W(s)} ds \right] y_k(t)$$

- É facil ver que

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 4e^t$$

Exemplo (2 de 3)

- Também que,

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = -2t - 1$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = 2$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = e^t$$

Exemplo (3 de 3)

- Assim a solução particular é

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{3} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s} W_k(s)}{W(s)} ds \right] y_k(t)$$

$$= e^t \int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s}(-2s-1)}{4e^s} ds + te^t \int_{t_0}^{t} \frac{2e^{2s}}{4e^s} ds + e^{-t} \int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s}e^{2s}}{4e^s} ds$$

$$= -\frac{e^t}{4} \int_{t_0}^{t} e^s (2s+1) ds + \frac{te^t}{2} \int_{t_0}^{t} e^s ds + \frac{e^{-t}}{4} \int_{t_0}^{t} e^{4s} ds$$

- Fazendo $t_0 = 0$, nos obtemos

$$Y(t) = -\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{12}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

- Ou simplesmente,

$$Y(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$$