# $1^a$ PROVA DE EDO 06/10/2011

PROF. GRIGORI CHAPIRO

**Nome** (letra de forma, legível), em cada folha. Não entregue esta folha.
**Todas as soluções tem que ser justificadas!**

**Questão 1.** Considere um retângulo $P = \{(t, x);\ |t - t_0| < a,\ |x - x_0| < b\} \subset \mathbb{R}^2$ e duas funções localmente lipshitzianas $f, g : P \to \mathbb{R}$, tais que $f < g$ em $P$. Sejam as funções $\phi$ e $\psi$ soluções de $x' = f(t, x)$ e $x' = g(t, x)$, respectivamente, definidas para $t_0 \leq t \leq c$, $\phi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$. Prove que $\phi(t) \leq \psi(t)$, para $t_0 \leq t \leq c$.

**Questão 2.** Seja $A \in M_{n\times n}$ - atrator. Mostre que

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0_{n\times n}.$$

(i.e. todas as coordenadas de $e^{tA}$ tendem a 0.)

**Questão 3.** Seja $f : [t_0, s] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Considere o conjunto

$$R_c = \{x_0 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \exists \phi : [t_0, s] \to \mathbb{R}, \text{ solução de } x' = f(t, x),\ \ \phi(s) = c,\ \phi(t_0) = x_0\}$$

ou seja, o conjunto de todos os pontos iniciais para os quais existe uma solução que atinge o ponto $c$ no tempo $s$. Prove que $R_c$ é conexo.
**Ponto extra para casa:** provar que $R_c$ é fechado.

**Questão 4.** Suponha que $\mu$ não é autovalor da matriz $A$. Prove que a equação

$$x' = A \cdot x + e^{\mu t} \cdot b,$$

onde $b$ é um vetor qualquer, tem uma única solução da forma $\phi(t) = ve^{\mu t}$.