OPCIONAL DA 1^a PROVA DE EDO 08/07/2011

PROF. GRIGORI CHAPIRO

Nome (letra de forma, legível), em cada folha. Não entregue esta folha.
Todas as soluções tem que ser justificadas!

Questão 1. (a) Enuncie Teorema de Picard.
(b) Dê uma idéia da demonstração do Teorema de Picard.

Questão 2. Considere um retângulo $P = \{(t,x);\ |t-t_0| < a,\ |x-x_0| < b\} \subset \mathbb{R}^2$ e duas funções localmente lipshitzianas $f, g : P \to \mathbb{R}$, tais que $f < g$ em P. Sejam as funções ϕ e ψ soluções de $x' = f(t,x)$ e $x' = g(t,x)$, respectivamente, definidas para $t_0 \leq t \leq c$, $\phi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$. Prove que $\phi(t) \leq \psi(t)$, para $t_0 \leq t \leq c$.

Questão 3. Seja $A \in M_{n\times n}$ - atrator. Mostre que

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0_{n\times n}.$$

(i.e. todas as coordenadas de e^{tA} tendem a 0.)

Questão 4. Prove ou dê contra-exemplo:
(a) Considere $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é solução de $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. É possível que existam $t_1 \neq t_2$, tais que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, porém $\phi'(t_1) \neq \phi'(t_2)$?
(b) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é solução de $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$. É possível que existam $t_1 \neq t_2$, tais que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, porém $\phi'(t_1) \neq \phi'(t_2)$?