1^a PROVA DE EDO 24/09/2015

PROF. GRIGORI CHAPIRO

Nome (letra de forma, legível), em cada folha. Não entregue esta folha.
Todas as soluções tem que ser justificadas!

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existem duas soluções $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ de

$$x' = f(t, x)$$

tais que Graf(ϕ_1)$\cap$Graf(ϕ_1) $= \{(0,p), (1,q)\}$, com p e q - reais. O conjunto Graf(ϕ_1)$\cup$Graf(ϕ_1) é fronteira de uma região D homeomorfa a um disco. Prove que para todo $d \in D$ existe uma solução ϕ da EDO tal que seu gráfico contém $(0,p)$, $(1,q)$ e d.

Questão 2. Sejam funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - contínua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Lipschitz contínua.
(a) Prove que o sistema

$$\begin{cases} x' = f(y)x, & x(t_0) = x_0, \\ y' = g(y), & y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

tem solução única em qualquer intervalo.
(b) Enuncie alguma possível generalização deste resultado para n equações.

Questão 3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não identicamente nula. Mostre que o PVI

$$x' = g(t)\sqrt{x}, \quad x(0) = 0,$$

não tem solução única. O que falha no teorema de existência e unicidade?

Questão 4. Usando teoria de EDO linear deste curso, resolva

$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Não esqueça de justificar as passagens.

Questão 5. (a) Enuncie o teorema de existência e unicidade das equações lineares.
(b) Escreva uma ideia da demonstração deste teorema.

Questão 6. Para fazer em casa. Entrega na próxima aula. Considere sistema linear

$$x' = Ax,$$

tal que qualquer solução dele satisfaz $x(1) = 2x(0)$, encontre todos os autovalores de $x(0)$.